

519.216 (075)

№ 5261

У-912



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования

«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра радиоприемных устройств и телевидения

Учебно-методическое пособие

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ОБРАБОТКА
РЕАЛИЗАЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для студентов
всех форм обучения

Ростов-на-Дону
Издательство Южного федерального университета
2014

УДК 519.216 (075.8)

Галустов Г.Г., Мелешкин С.Н. Учебно-методическое пособие «Автоматизированная обработка реализаций случайных процессов». – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. – 40 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов специальности 210400, изучающих курс "Радиотехнические цепи и сигналы" (спец. разделы). Оно также может быть использовано студентами всех специальностей при обработке результатов экспериментов, выполняемых при научно-исследовательской работе и дипломном проектировании.

В пособии приведены краткие теоретические сведения, а также структурные схемы программ для выполнения расчетов на ЭВМ.

Табл. 2. Ил.10. Библиогр.: 17 назв.

Рецензент: Лебедев Б.К., д-р техн. наук, профессор кафедры САПР ЮФУ.

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие и сложность реальных явлений потребовала для адекватного отражения введения такой математической модели, как случайный процесс. На практике случайные процессы описываются с помощью конечной совокупности статистических (вероятностных) характеристик. Во многих случаях требуемые вероятностные характеристики случайного процесса необходимо получить на основе анализа экспериментальных данных.

Целью настоящего пособия является помощь в изучении методики оценки вероятностных характеристик случайного процесса, заданного одной, достаточно протяженной реализацией, практическое ознакомление с алгоритмами вычисления оценок вероятностных характеристик с помощью ЭВМ и качественная интерпретация полученных в результате расчетов характеристик.

Необходимость ознакомления студентов с основами статистической обработки случайных процессов вызвано широким внедрением в современное производство статистических методов решения различных задач.

1. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

При исследованиях реально действующих радиотехнических объектов важнейшими вопросами, возникающими при обработке результатов испытаний, являются определение параметров случайных функций, действующих на объект, и определение характеристик объекта во время испытаний.

Получение точных значений интересующих величин, как правило, бывает невозможным, так как испытания не только происходят в условиях случайных значений сигналов на входах и выходах объектов, но и сопровождаются погрешностями измерений шумами. Поэтому приходится оценивать эти значения.

До последнего времени при оценках параметров случайных функций и при определении характеристик динамических систем по результатам испытаний ставили требования не смещенности и эффективности оценок. Но, как показано в ряде источников, эффективные оценки для параметров случайных процессов в большинстве случаев некорректны.

Сколь угодно малым погрешностям в оценках сигналов или параметров оцениваемых функций могут отвечать сколь угодно большие погрешности исследуемых значений. Причём речь идёт не только о возрастании погрешности. Оценка вообще становится неприемлемой, так как её дисперсия стремится к бесконечности.

Поэтому строят субоптимальные оценки. Для этих оценок при весьма общих ограничениях оказывается справедливым утверждение, что оценки по дискретным реализациям точнее оценок по непрерывным реализациям. А это позволяет широко использовать цифровую вычислительную технику для исследований реализаций случайных процессов и полей.

Отказ от эффективных оценок ставит вопрос о других методах повышения точности субоптимальных оценок. Повышение точности оценок достигается введением смещенности. Как показывают расчёты, смещённая оценка имеет среднеквадратическое отклонение, меньшее, чем дисперсия эффективной оценки. Смещение может быть введено не только в оценки математического ожидания, но и в оценки дисперсии, корреляционной функции.

2. СВОЙСТВА ОЦЕНОК И МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИРУЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вероятностные параметры и характеристики случайных процессов являются неслучайными числами или функциями и теоретически определяются по ансамблю бесконечно большого числа реализаций или по одной реализации бесконечной длительности, если случайный процесс стационарный и эргодический [1,2].

При экспериментальном исследовании стационарного эргодического случайного процесса экспериментатор всегда располагает реализацией не бесконечной, а конечной длительности T .

Поэтому полученная экспериментально характеристика уже только из-за этого будет отличаться от истинной вероятностной характеристики. Эту характеристику, полученную экспериментально при конечном времени измерения T , называют оценкой измеряемой вероятностной характеристики. Аналогичные термины используются при измерении параметров: результатом экспериментального определения параметра при конечном времени измерения является оценка параметра.

"Точечная" означает, что оценка представляет собой число или точку на числовой оси.

Обозначим через A некоторую оцениваемую характеристику (ею может быть математическое ожидание, дисперсия и любая другая числовая характеристика случайной величины X).

Ее числовое значение неизвестно, однако предложен некоторый алгоритм или формула вычисления точечной оценки A_n^* этой характеристики по результатам $x_1, x_2, \dots, x_n$ наблюдений величины X . Обозначим буквой f этот алгоритм: $A_n^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ [3].

Подставив в формулу конкретные результаты наблюдений, получим число, которое и принимают за приближенное значение неизвестной характеристики A .

Найти погрешность этого приближения нельзя, поскольку истинное числовое значение характеристики неизвестно. Чтобы ответить на вопрос: хорошо или нет найденное приближение – рассмотрим оценку A_n^* и ее свойства.

Так как результаты наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ – случайные величины, то и оценка A_n^* – также величина случайная.

Следовательно, можно говорить о ее математическом ожидании $M[A_n^*]$, дисперсии $D[A_n^*]$ и законе распределения.

Интерпретация оценки A_n^* как случайной величины позволяет сформулировать свойства, которыми должна обладать оценка, чтобы ее можно было считать хорошим приближением к неизвестной оценке A . Это свойства состоятельности, несмещенности и эффективности [3].

Состоятельность. Оценка A_n^* характеристики A называется состоятельной, если она удовлетворяет закону больших чисел, т.е. сходится по вероятности к оцениваемому параметру: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n^* - A| < a) = 1$ или $A_n^* \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Если говорить коротко, то чем больше объем исходной информации, тем ближе оценка к оцениваемому параметру. Если это так, то A_n^* – состоятельная оценка.

Если оценка несостоятельная, то она не имеет практического смысла: увеличение объема исходной информации не будет приближать нас к истине. Поэтому свойство состоятельности следует проверять в первую очередь.

Несмещенность. Оценка A_n^* характеристики A называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру: $M[A_n^*] = A$.

В противном случае оценка называется смещенной. Если это равенство не выполняется, то оценка A_n^* , полученная по разным выборкам, будет либо завышать A , если $M[A_n^*] > A$, либо занижать A , если $M[A_n^*] < A$.

Таким образом, требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании.

Эффективность. Несмещенная оценка A_n^* характеристики A называется эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра A , вычисленных по выборкам одного и того же объема n , т.е. $D[A_n^*] = \min$.

Поскольку оценка – это случайная величина, то показателем разброса значений случайной величины около ее математического ожидания является дисперсия. Так как математические ожидания несмещенных оценок равны оцениваемому параметру, следовательно, они одинаковы. Тогда естественно считать лучшей, более эффективной ту оценку, у которой меньше дисперсия.

Для получения оценок неизвестных параметров распределений практически используются четыре метода: метод моментов, метод минимальной дисперсии оценки, метод максимальной апостериорной вероятности, метод максимального правдоподобия [2]. Из этих методов наиболее часто используются метод моментов и метод максимального правдоподобия. При методе моментов выборочные моменты приравниваются к соответствующим моментам теоретического распределения, которые являются функциями от неизвестных оцениваемых параметров. В случае оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра.

Например, задан вид плотности вероятности $W(x, \lambda)$, зависящий от одного параметра λ , и требуется найти оценку λ^* этого параметра.

Следуя методу моментов, приравняем первый теоретический момент $m_1(\lambda) = m_x(\lambda)$ первому выборочному моменту:

$$m_1^*(\lambda) = m_x^*(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad m_x(\lambda) = m_x, \quad (2.1)$$

где $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$, $i = 1, 2, \dots, n$ — выборочные значения случайного процесса $x(t)$.

Решив уравнение (2.1) относительно λ , найдем оценку λ^* , которая является функцией выборочной средней и, следовательно, функцией выборочных значений:

$$\lambda^* = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

При оценке k неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ следует найти все k моментов распределения $W(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$:

$$m_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^j W(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) dx, \quad (2.3)$$

где $j = 1, 2, \dots, k$, а затем соответствующие выборочные моменты:

$$m_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = m_j^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.4)$$

и приравнивать их.

Решив эту систему, определим оценки неизвестных параметров.

Оценки по методу моментов в смысле эффективности не являются "наилучшими" – в больших выборках они имеют не наименьшую дисперсию.

$$W_{DS}(\lambda) = kW_{Dr}(\lambda)L(\lambda), \quad (2.6)$$

$L(\lambda)$ – функция правдоподобия.

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n W_1(x_i, \lambda). \quad (2.7)$$

За оценку максимального правдоподобия параметра λ принимается такое его значение, при котором $L(\lambda)$ достигает максимума, то есть такая оценка является решением уравнения правдоподобия:

$$\left. \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = \frac{\partial \ln L(\lambda^*)}{\partial \lambda^*} = 0. \quad (2.8)$$

При оценке k неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ распределения $W_1(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ оценки определяются как решение системы уравнений

$$\frac{\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (2.9)$$

Оценки, полученные по этому методу, при довольно общих условиях являются состоятельными, асимптотически несмещенными, асимптотически нормальными и асимптотически эффективными. Отмеченные свойства обуславливают применение метода максимального правдоподобия для оценки параметров закона распределения на стадии обучения.

Оценка параметров известного распределения с неизвестными параметрами по методу моментов приводит к решению системы (2.5), где участвуют оценки моментов различных порядков. Следует отметить, что получение оценок моментов высоких порядков связано с трудностями их практической реализации, особенно в автономных устройствах обработки сигналов.

В качестве оцениваемых параметров могут выступать не только параметры распределений, но и зачастую оцениваются оптимальные оценки других статистических характеристик (например, спектральная плотность, корреляционная функция и т.д.).

Для оценки параметров стационарного эргодического случайного процесса можно пользоваться понятием среднего квадрата оценки.

Погрешность оценки $\Delta A = A^* - A$ можно охарактеризовать её средним квадратом:

$$M[(A^* - A)^2] = M[(A^*)^2] - 2AM[(A^*)] + A^*. \quad (2.10)$$

Равенство (2.1) можно представить в несколько ином виде:

$$M[(A^* - A)^2] = D[A^*] + \{b[A^*]\}^2, \quad (2.11)$$

$$\{b[A^*]\}^2 = \{M[A^*] - A\}^2, \quad (2.12)$$

где $b[A^*] = M[A^*] - A$ – смещение оценки.

Таким образом, средний квадрат погрешности оценки равен сумме дисперсии оценки и квадрата её смещения. Дисперсия оценки характеризует её случайную погрешность (рассеяние оценки относительно её математического ожидания), а смещение оценки – систематическую погрешность.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Под случайным процессом $X(t)$ понимают математическую модель реального процесса, протекающего во времени, заданного в виде совокупности реализаций и описываемого вероятностными законами [11].

Мгновенные значения функции $X(t)$ в любые моменты времени являются случайными величинами.

Случайный процесс, описываемый случайной функцией $X(t)$, может быть представлен бесконечным набором (ансамблем) своих реализаций:

$$x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_k(t), x_\infty(t).$$

Реализации случайного процесса могут быть получены из наблюдения за его протеканием во времени.

Случайные процессы могут быть классифицированы по различным признакам (полная классификация случайных процессов ещё не разработана [1]). В зависимости от того, зависят ли статистические характеристики случайного процесса от момента начала отсчета времени t , случайные процессы классифицируют на стационарные и нестационарные.

Стационарными называют такие процессы, у которых функция распределения не зависит от начала отсчета времени, т.е. при любом τ имеет место равенство

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Различают процессы стационарные в узком смысле и в широком смысле. Процессы, для которых выполняется условие (3.1), т.е. n -мерная функция распределения не зависит от времени (n – конечная величина произвольного порядка), называются стационарными в узком смысле. Если от времени не зависят математическое ожидание и дисперсия, а корреляционная функция зависит только от разности времени τ , процессы называют стационарными в широком смысле.

Случайные процессы, стационарные в узком смысле, стационарны и в широком смысле, но не наоборот. Если статистические характеристики процесса $X(t)$ зависят от времени t , то процесс называют нестационарным.

Для тех стационарных процессов, которые характеризуется так называемым эргодическим свойством, усреднение по всей совокупности реализаций дает тот же результат, что и усреднение по времени одной реализации, если время усреднения T достаточно велико.

Случайные процессы также классифицируют на непрерывные и дискретные. К первым относят процессы, у которых аргумент t непрерывен на рассматриваемом отрезке, ко вторым, - если время носит дискретный характер. Непрерывными или дискретными (чаще говорят квантованными) могут быть значения ординат случайного процесса. Отсюда следует, что возможны следующие виды процессов [2]:

- 1) случайный процесс общего типа: t и $X(t)$ могут принимать любые значения на действительной оси;
- 2) дискретный случайный процесс: t непрерывно, а величины $X(t)$ квантованы;
- 3) случайная последовательность общего типа: t дискретно, а $X(t)$ может принимать любые значения на действительной оси;
- 4) дискретная случайная последовательность: t дискретно и $X(t)$ квантовано.

Если случайный процесс представлен выборочными значениями, следующими через равные интервалы T_0 , то случайная функция, характеризующая данный случайный процесс, записывается в виде $X(iT_0)$. А последовательность случайных выборочных значений, следующих через равные интервалы T_0 , часто называют равномерной случайной последовательностью.

Классифицируют случайные процессы и по зависимости случайной функции от ее значений в предшествующие моменты времени [1]:

1. Совершенно случайный процесс – описывается случайной функцией, полностью определяемой одномерной плотностью вероятностей. Последовательные значения такой функции статистически независимы от предыдущих значений, как бы ни были малы разделяющие их промежутки времени.

2. Марковский процесс – описывается случайной функцией, полностью определяемой двумерной плотностью вероятностей. Настоящее значение марковского процесса зависит только от непосредственно предшествующего момента времени.

3. Не марковские процессы – процессы, не подходящие под определение марковских.

По тому, какой является относительная ширина полосы частот (по отношению к средней частоте), где сосредоточен спектр мощности, случайные процессы различают узкополосные и широкополосные.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Функция распределения вероятностей непрерывного случайного процесса, описываемого случайной функцией $X(t)$, в фиксированный момент времени $t = t_1$ определяет вероятность того, что в указанный момент любое значение случайного процесса меньше некоторого переменного значения x [1].

Функция распределения (рис. 4.1) может быть задана соотношением

$$F(x, t_1) = P[X(t_1) < x] \quad (4.1)$$

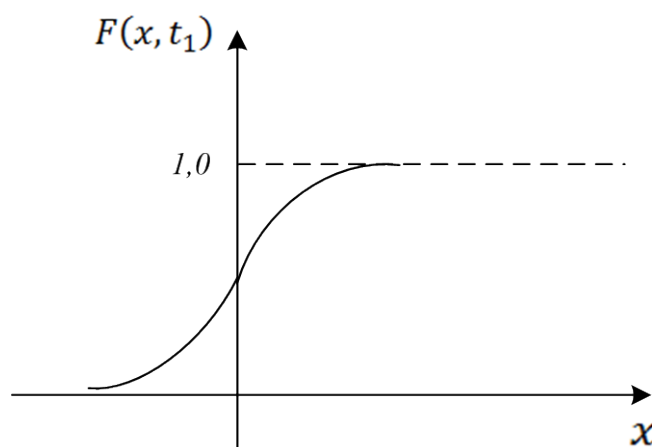


Рис. 4.1

Учитывая, что для эргодического случайного процесса функция распределения может быть определена по одной его реализации, можно определять ее через относительное время пребывания значений реализации длительности $T \rightarrow \infty$ ниже заданного уровня x (рис. 4.2).

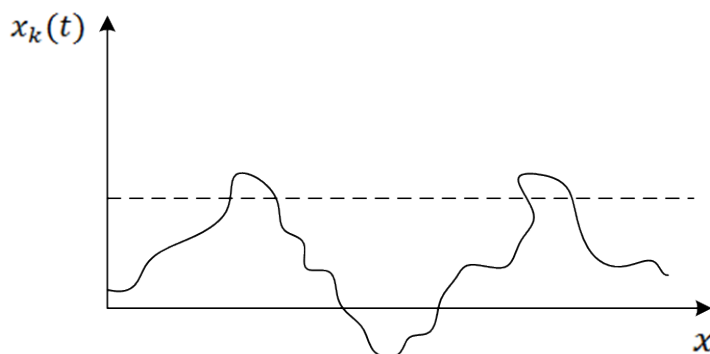


Рис. 4.2

Свойства функции распределения:

$$F(x, t) \geq 0, \text{ если } -\infty < x < +\infty \text{ (при любых } x) \quad (4.2)$$

$$0 \leq F(x, t) \leq 1;$$

$$F(\infty, t) = 1; F(-\infty, t) = 0; \quad (4.3)$$

$F(x)$ – неубывающая функция аргумента x ; график функции повсюду непрерывен слева.

Для равномерной случайной последовательности функция распределения примет такой вид: $F(x, iT_0) = P[X(iT_0) < x]$.

Функция распределения случайной последовательности не отличается от функции распределения случайного процесса, из которого взяты выборочные значения в моменты $t = iT_0$.

Плотность вероятности $f(x_1, t_1)$ представляет собой производную от функции распределения

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}. \quad (4.4)$$

При этом справедливо равенство (с точностью до бесконечно малой величины)

$$f(x, t_1)dx = p[x < X(t_1) \leq x + dx]. \quad (4.5)$$

Если процесс обладает свойством эргодичности, то

$$f(x)dx \approx P[x < x(t) \leq x + dx] \quad (4.6)$$

эта вероятность может быть определена как площадь под функцией $f(x)$ при изменении аргумента в пределах x до $x+dx$ (рис. 4.3).

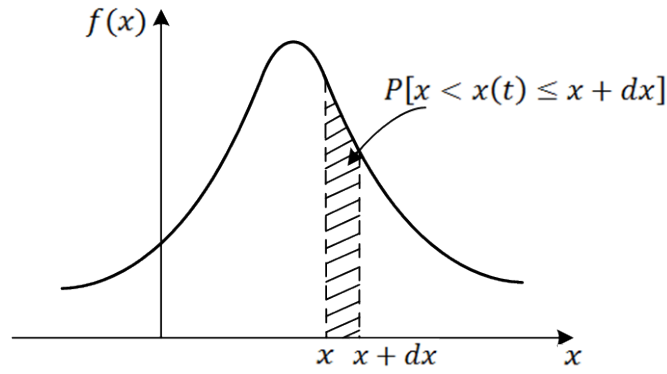


Рис. 4.3

Основные свойства плотности вероятности [3]:

$$f(x, t) \geq 0 \text{ при всех } x; \quad (4.7)$$

$$\int_{-\infty}^x f(x, t) dx = F(x, t); \quad (4.8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \text{ (условие нормировки)}. \quad (4.9)$$

Для равномерной случайной последовательности

$$f(x, iT_0) dx \approx P[X(iT_0) \leq x + dx]. \quad (4.10)$$

При решении практических задач часто пользуются так называемой характеристической функцией случайного процесса $X(t)$, которая определяется выражением

$$\xi_x(u, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{jux} dx = \langle e^{jx(t)} \rangle, \quad (4.11)$$

где u – аргумент характеристической функции, скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

Основные свойства характеристической функции [1]:

$$1. \xi_x(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = 1; \quad (4.12)$$

$$2. |\xi_x(u, t)| \leq 1; \quad (4.13)$$

$$3. \xi_x^*(u, t) = \xi_x(-u, t). \quad (4.14)$$

(Звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина.)

4. Характеристическая функция суммы независимых случайных функций $z(t) = \sum_{v=1}^n X_v(t)$ равна произведению характеристических функций слагаемых

$$\xi_x(u, t) = \prod_{v=1}^n \xi_{xv}(u, t). \quad (4.15)$$

5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНОГО ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Статистические характеристики стационарных случайных процессов не зависят от времени.

Среднее значение случайного процесса по ансамблю реализаций характеризуется его математическим ожиданием и может быть определено из выражения

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xF(x) dx. \quad (5.1)$$

Для процессов, обладающих свойством эргодичности, справедливо равенство

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xF(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_k(t) dt = \overline{x(t)} = m_x, \quad (5.2)$$

где $x_k(t)$ – k -я реализация случайного процесса $X(t)$.

Последнее равенство утверждает, что для эргодических процессов усреднение по ансамблю может быть заменено усреднением по времени одной реализации.

Математическое ожидание равномерной случайной последовательности может быть найдено из выражения

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k(iT_0), \quad (5.3)$$

если этот предел существует.

Дисперсия характеризует рассеяние возможных реализаций случайной функции $X(t)$ относительно ее среднего значения. Для эргодического (по отношению к дисперсии) случайного процесса дисперсия определяется таким образом:

$$D_x = M\{[x(t)]^2 - m_x^2\} = \overline{x(t)^2} - [\overline{x(t)}]^2. \quad (5.4)$$

Для равномерной случайной последовательности выражение для дисперсии имеет вид

$$D[X(iT_0)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [x(iT_0) - m_x]^2. \quad (5.5)$$

Дисперсия характеризует рассеяние в квадратичной мере. На практике часто пользуются такой характеристикой, как среднеквадратичное отклонение, которое связано с дисперсией таким образом:

$$\sigma_x = +\sqrt{D_x}. \quad (5.6)$$

Корреляционная функция характеризует тесноту линейной стохастической связи (корреляцию) между значениями случайного процесса в различные моменты времени [1].

Для эргодических (по отношению к функции корреляции) случайных процессов функция корреляции может быть определена по одной реализации

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt. \quad (5.7)$$

Для равномерной случайной последовательности функция корреляции может быть записана в виде

$$K_x(kT_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [x(iT_0 - m_x)][x(hT_0 - m_x)], \quad (5.8)$$

где $k = h - i, k = 0, 1, 2, \dots$

Основные свойства корреляционных функций стационарных случайных процессов [1, 2, 4]:

1. $K_x(\tau)$ – функция четная, $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$. (5.9)
2. Корреляционная функция всегда удовлетворяет неравенству

$$K_x(\tau) \leq K_x(0) = D_x = \sigma_x^2. \quad (5.10)$$

Для процессов, обладающих эргодическим свойством, можно отметить также, что при $\tau \rightarrow \infty, K_x(\tau) = 0$.

Для удобства практических расчетов пользуются определением нормированной корреляционной функции

$$\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)} = \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2}. \quad (5.11)$$

Спектральная плотность мощности (энергетический спектр) $G_x(f)$ стационарного эргодического случайного процесса $X(t)$ определяет распределение средней мощности процесса по частоте.

Спектр мощности $G_x(f)$ процесса $X(t)$ связан с корреляционной функцией $K_x(\tau)$ этого процесса парой преобразования Фурье (теорема Винера-Хинчина)

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau; \quad (5.12)$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (5.13)$$

Основные свойства спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса [1,3,4]:

1. Спектральная плотность мощности неотрицательна, т.е. при любом значении f $G_x(f) \geq 0$. (5.14)

2. При ограниченной дисперсии случайного процесса

$$\lim_{f \rightarrow \infty} G_x(f) = 0. \quad (5.15)$$

3. Спектральная плотность является вещественной функцией f .

4. $G_x(f)$ – четная функция, т.е. $G_x(f) = G_x(-f)$. (5.16)

5. $\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df = K_x(0) = D_x$. (5.17)

6. Изменение масштаба m аргумента τ корреляционной функции вызывает обратное изменение масштаба частоты f и величины спектральной плотности $G_x(f)$, т.е. если $K_2(\tau) = K_1(m\tau)$, то соответственно

$$G_2(f) = \frac{1}{m} G_1\left(\frac{f}{m}\right). \quad (5.18)$$

7. Спектральная плотность мощности процесса на выходе линейной системы с постоянными параметрами с передаточной функцией $K(jf)$ может быть определена из выражения

$$G_y(f) = K^2(f) G_x(f), \quad (5.19)$$

где $G_x(f)$ и $G_y(f)$ – спектры мощности на входе и выходе;

$K(f)$ – модуль передаточной функции линейной системы.

По аналогии с нормированной корреляционной функцией пользуются понятием нормированной спектральной плотности мощности

$$g_x(f) = \frac{G_x(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) df} = \frac{G_x(f)}{K_x(0)}. \quad (5.20)$$

Для $g_x(f)$ характерны соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_x(f) df = 1. \quad (5.21)$$

Из (5.12) с учетом выражения (5.20) можно получить

$$g_x(f) = 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \quad (5.22)$$

Примечание. Многие авторы используют определение нормированной спектральной плотности мощности в виде

$$g_x(f) = \frac{G_x(f)}{G_{\max}(f)}.$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ВЫБОРОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИЗ РЕАЛИЗАЦИЙ ЭТИХ ПРОЦЕССОВ

На практике обычно имеют дело с некоторым ограниченным количеством выборочных значений из реализаций случайного процесса, поэтому результаты их обработки всегда содержат больший или меньший элемент случайности. К методике обработки выборочных значений предъявляют такие требования, которые позволяют по возможности сохранить характерные черты наблюдаемого процесса и отбросить все второстепенное, связанное с ограниченным объемом выборочных значений. Эти задачи в математической статистике носят названия сглаживания или выравнивания статистических данных, т.е. статистические распределения представляются в виде простых аналитических зависимостей [3,6].

Предположим, что в нашем распоряжении имеются результаты равномерной выборки из реализации стационарного эргодического случайного процесса $X(t)$. Так как совокупность выборочных значений $X(iT_0)$, представляющая собой равномерную случайную последовательность, можно трактовать как набор значений, полученных в результате наблюдения над некоторой непрерывной случайной величиной X , то полное вероятностное описание величины X дается плотностью вероятностей $f(x)$ (функцией распределения $F(x)$).

Ввиду ограниченности набора значений случайной величины X представление о характере ее плотности вероятности в смысле наглядности дают такие характеристики статистических распределений, как статистический ряд, гистограмма. Разделим весь диапазон выборочных значений случайной величины X на k интервалов (разрядов) и определим, сколько выборочных значений попало в каждый из интервалов (разрядов). Если теперь количество выборочных значений m_i , попавших в i -й разряд, разделить на общее количество выборочных значений n , то получим частоту P_i^* , соответствующую данному интервалу

$$P_i^* = \frac{m_i}{n}. \quad (6.1)$$

При этом нетрудно убедиться, что будет выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^k P_i^* = 1. \quad (6.2)$$

Таблица, в которой приведены значения интервалов в порядке их возрастания и соответствующие этим интервалам частоты, называется статистическим рядом (табл.1).

Таблица 1

I_i	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_i, x_{i+1}	...	x_k, x_{k+1}
P_i^*	P_1^*	P_2^*	...	P_i^*	...	P_k^*

Здесь $x_i; x_{i+1}$ – обозначение границ i -го разряда (интервала). Если при группировке значений по разрядам численное значение выборки в точности совпало с граничным значением разряда, то необходимо считать это значение выборки принадлежащей в равной мере к обоим разрядам, поэтому к числам m_i обоих граничных разрядов прибавляют по 0,5. При увеличении объема выборочных значений число разрядов k следует увеличивать.

Длины разрядов чаще всего выбирают одинаковыми. Можно рекомендовать при $n \approx 100 \div 200$, k выбирать в пределах $k \approx 8 \div 14$.

Статистический ряд, оформленный графически, называют гистограммой. Гистограмма может быть построена таким образом: по оси абсцисс откладываются разряды и на каждом из разрядов, как на основании, строится прямоугольник, по площади равной частоте этого разряда (интервала).

В качестве высоты прямоугольника следует брать значение, определяемое как отношение частности к величине разряда:

$$y_i = \frac{p_i^*}{x_{i+1} - x_i}. \quad (6.3)$$

В случае, когда длины разрядов равны, высоты прямоугольников получаются пропорциональными соответствующим частотам.

На основании способа построения гистограммы можно утверждать, что полная ее площадь равна единице (рис.6.1).

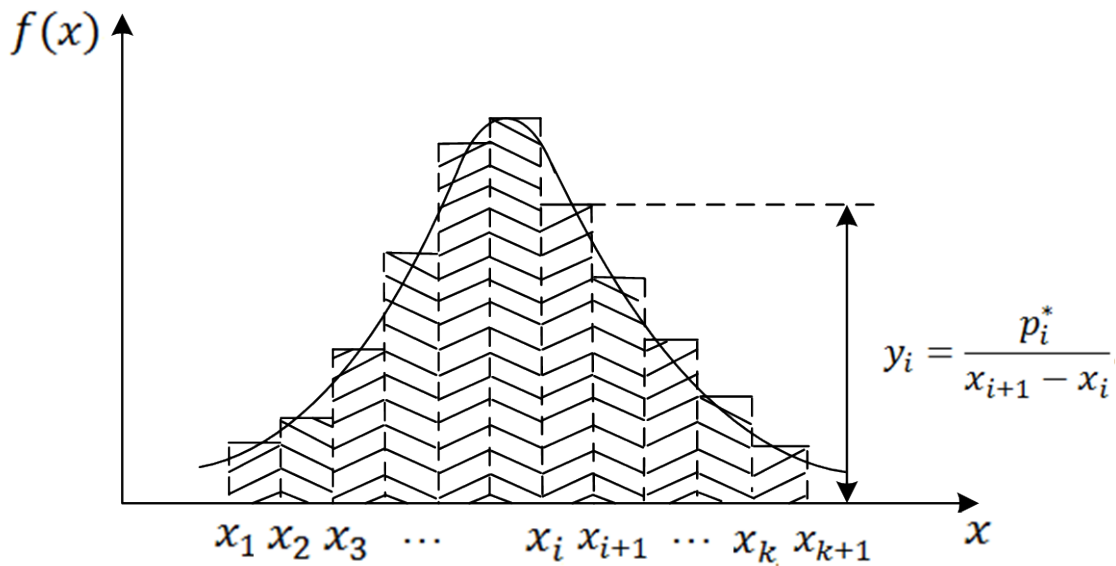


Рис. 6.1

Выше уже отмечалось, что при увеличении объема выборочных значений длину разряда следует брать все более мелкой, при этом гистограмма будет стремиться к некоторой кривой, ограничивающей площадь, равную единице.

Эта кривая будет представлять собой не что иное, как график плотности вероятности случайной величины $X-f(x)$ (рис. 6.1).

Каждой числовой характеристике случайного процесса, рассмотренной ранее, соответствует ее статистическая аналогия.

Ниже эти статистические аналогии будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие числовые характеристики случайного процесса, но снабжать их значком *.

Эти статистические аналогии называют оценками соответствующих числовых характеристик, так как они дают о них определенное представление, а при увеличении числа независимых выборочных значений к бесконечности оценки сходятся по вероятности к соответствующим числовым характеристикам случайного процесса.

Например, оценка математического ожидания m_x^* может быть определена из выражения

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (6.4)$$

при стремлении $n \rightarrow \infty$, $m_x^* \rightarrow m_x$, т.е.

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (6.5)$$

При ограниченном числе выборочных значений оценки статистических характеристик являются случайными величинами и могут дать лишь приближенное представление о значении числовой характеристики случайного процесса.

Чтобы характеризовать точность и надежность оценок в математической статистике, пользуются понятиями доверительных интервалов и доверительных вероятностей.

Пусть для некоторой статистической характеристики (параметра) a получена из опыта несмещенная оценка a^* , определение которой дано в [3] и [1], и необходимо оценить возможную при этом ошибку. Назначим некоторую достаточно большую вероятность, (например, $\alpha = 0,99$). Считая, что событие с вероятностью α можно считать практически достоверным, найдем такое значение ξ , для которого выполняется равенство

$$P(|a^* - a| < \xi) = \alpha. \quad (6.6)$$

Из равенства (6.6) видно, что при замене a на a^* возможные значения ошибки будут в интервале $(-\xi; +\xi)$, а большие по абсолютной величине ошибки появятся с малой вероятностью $\beta = 1 - \alpha$. Равенство (6.6) можно записать так:

$$P(a^* - \xi < a < a^* + \xi) = \alpha. \quad (6.7)$$

Равенство это показывает, что с вероятностью α неизвестное значение статистической характеристики a попадает в интервал

$$I_\alpha = (a^* - \xi; a^* + \xi). \quad (6.8)$$

Так как оценка a^* и значение ξ , которое вычисляется на основе опытных данных, носят случайный характер, то случаен и сам интервал I_α . Поэтому в данном случае лучше толковать вероятность α , как вероятность того, что случайный интервал I_α накроет значение статистической характеристики (параметра) " a " (рис. 6.2).

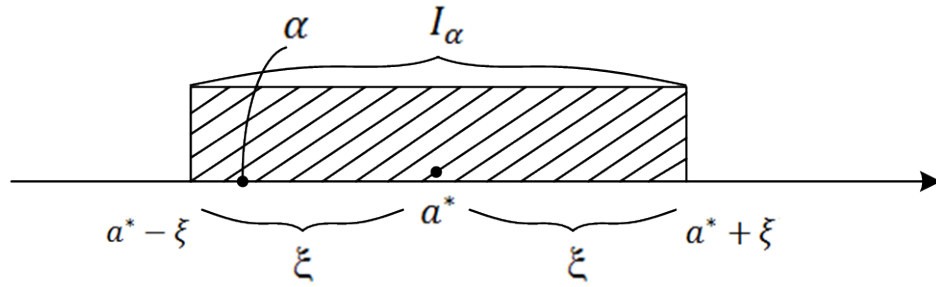


Рис. 6.2

Вероятность α называют доверительной вероятностью, а интервал I_α – доверительным интервалом.

Рассмотрим в качестве примера задачу о доверительном интервале для математического ожидания. Допустим, что для случайной величины X с неизвестными математическим ожиданием и дисперсией получены оценки этих статистических характеристик при n опытах

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ и } D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n-1} \quad (6.9)$$

и необходимо построить доверительный интервал I_α при заданной доверительной вероятности α для математического ожидания m_x случайной величины X .

На основании центральной теоремы можно полагать, что оценка m_x^* имеет нормальный закон распределения. Поэтому можно утверждать, что статистические характеристики случайной величины m_x^* могут быть определены через статистические характеристики случайной величины X , таким образом [1]:

$$M[m_x^*] = m_x; \quad D_x^*[m_x^*] = \frac{D_x}{n}.$$

Определим такую величину ξ_α , для которой

$$P(|m_x^* - m_x| < \xi_\alpha) = \alpha. \quad (6.10)$$

Левую часть равенства выразим через интеграл вероятности

$$P(|m_x^* - m_x| < \xi_\alpha) = 2\Phi^*\left(\frac{\xi_\alpha}{\sigma_{m_x^*}}\right) - 1, \quad (6.11)$$

где $\sigma_{m_x^*} = \sqrt{\frac{D_x^*}{n}}$ – среднеквадратичное отклонение оценки m_x^* .

Из уравнения

$$2\Phi^*\left(\frac{\xi_\alpha}{\sigma_{m_x^*}}\right) - 1 = \alpha \quad (6.12)$$

находим

$$\xi_\alpha = \sigma_{m_x^*} \arg \Phi^*\left(\frac{1+\alpha}{2}\right). \quad (6.13)$$

Для вычисления ξ_α можно воспользоваться табл. 2, где приведены величины $t_\alpha = \arg \Phi^* \left(\frac{1+\alpha}{2} \right)$, соответствующие различным α .

Таблица 2

α	0,8	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88
t_α	1,282	1,310	1,340	1,371	1,404	1,439	1,475	1,513	1,554
α	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97
t_α	1,597	1,643	1,694	1,750	1,810	1,880	1,960	2,053	2,169
α	0,98	0,99	0,9973	0,999					
t_α	2,325	2,576	3,000	3,290					

Таким образом, приближенно доверительный интервал для математического ожидания может быть записан как

$$I_\alpha = (m_x^* - t_\alpha \sigma_{m_x^*}; m_x^* + t_\alpha \sigma_{m_x^*}). \quad (6.14)$$

Аналогичным образом строится и доверительный интервал для дисперсии случайной величины X .

Для часто встречающегося случая, когда совокупность выборочных значений может быть представлена как значения случайной величины с нормальным законом распределения, среднеквадратичное значение оценки дисперсии может быть приближенно определена из выражения [3,6]:

$$\sigma_{D_x^*} \approx \sqrt{\frac{2}{n-1}} D_x^*.$$

Если значение $\sigma_{D_x^*}$ получено, то доверительный интервал для дисперсии выглядит таким образом:

$$I_\alpha = (D_x^* - t_\alpha \sigma_{D_x^*}; D_x^* + t_\alpha \sigma_{D_x^*}). \quad (6.15)$$

После того как построен статистический ряд (гистограмма) и определены оценки выборочного распределения, часто приходится решать задачу о подборе для данного статистического ряда аналитической кривой распределения, выражающей лишь существенные черты статистического материала, а не случайности, связанные с недостаточным объемом статистического материала, т.е. решить задачу сглаживания статистических рядов.

Вид аналитической кривой $f(x)$ (см. рис. 6.1), как правило, выбирается из соображений, связанных с существом задачи, или в соответствии с внешним видом гистограммы.

Параметры выбранной кривой распределения выбирают обычно из наилучшего соответствия теоретического и статистического распределений, при этом необходимо учитывать, что любая аналитическая функция $f(x)$, с помощью которой выравнивается статистическое распределение, должна обладать основными свойствами плотности вероятности (4.7 – 4.9).

Если, исходя из каких-либо соображений, аналитическая функция $f(x)$ выбрана и в выражение этой функции входит несколько параметров, то подобрать эти параметры для наилучшего соответствия теоретического и статистического распределений можно с помощью различных методов [3,4,6,7].

Наиболее простой и часто применяемый метод для решения задачи подбора параметров теоретического распределения – это так называемый метод моментов. В соответствии с этим методом параметры аналитической кривой выбираются из условия равенства важнейших статистических характеристик теоретического и статистического распределений.

Например, выбранная аналитическая кривая $f(x)$ зависит от двух параметров a и b , эти параметры должны быть выбраны таким образом, чтобы математическое ожидание m_x и дисперсия D_x теоретического распределения $f(x)$ совпадали с m_x^* и D_x^* статистического распределения.

Когда подобрана аналитическая кривая и выбраны ее параметры, возникает задача объяснения тех расхождений между теоретическим и статистическим распределениями, которые всегда присутствуют, как бы хорошо ни была подобрана сглаживающая функция $f(x)$.

Необходимо ответить на вопрос: объясняются ли эти расхождения недостаточным объемом выборочных значений или просто подобранная кривая $f(x)$ плохо выравнивает данное статистическое распределение. Чтобы дать ответ на этот вопрос, необходимо воспользоваться так называемыми "критериями согласия" [3,4,7,8,10].

Ограничимся рассмотрением лишь одного наиболее часто применяемого критерия согласия χ^2 Пирсона.

Допустим, что требуется проверить, согласуются ли экспериментальные данные с гипотезой H о том, что случайная величина X , представленная статистическим рядом (табл.1), имеет плотность распределения вероятностей $f(x)$. Будем называть эту плотность вероятности теоретической.

Определим теоретические вероятности попадания случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ в каждый из разрядов статистического ряда.

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_i, \dots, P_k.$$

К. Пирсон показал, что если исходить из расхождений между теоретическими вероятностями P_i и экспериментальными частотами P_i^* , то при достаточно больших n ($n \sim$ более 100) закон распределения величины U , определяемой выражением

$$U = n \sum_{i=1}^k \frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i}, \quad (6.16)$$

практически не зависит от вида плотности вероятности $f(x)$ и от числа опытов n , а зависит только от числа разрядов k , причем при увеличении n закон этот стремится к распределению χ^2 .

Выражение (6.16) можно записать в другом, удобном для вычислений виде

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}, \quad (6.17)$$

где $m_i = nP_i^*$ – число значений, попавших в i -й разряд. Распределение χ^2 зависит от параметра r , называемого числом степеней свободы распределения, который определяется из равенства

$$r = k - s, \quad (6.18)$$

где k – число разрядов (интервалов) статистического ряда;

S – число независимых условий, наложенных на частоты P_i^* ; $s = 1$, если от теоретического распределения требуется только выполнение условий нормировки

$$\sum_{i=1}^k P_i^* = 1; \quad (6.19)$$

$s = 2$, если требуется выполнение не только условия (6.19), но и равенства теоретических и статистических математических ожиданий, т.е.

$$\sum_{i=1}^k \tilde{x}_i P_i^* = m_x, \quad (6.20)$$

где $\tilde{x}_i$ – среднее в i -м разряде значение;

$s = 3$, если кроме указанных условий (6.19) и (6.20) еще требуется совпадение теоретической и статистической дисперсий:

$$\sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - m_x^*)^2 P_i^* = D_x \quad (6.21)$$

и так далее.

Существуют специальные таблицы распределений χ^2 [3,4,6], с помощью которых можно для каждого вычисленного значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятности P того, что величина U превзойдет это значение, а это позволяет оценить степень согласованности теоретического и статистического распределений.

Гипотезу H о том, что случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$ можно считать правдоподобной или хотя бы не противоречащей опытным данным, если вероятность P , полученная из таблицы распределения χ^2 , находится в пределах от 0,1 до 0,6. Для подтверждения правдоподобия гипотезы о согласованности теоретического и статистического распределений проверку по критерию χ^2 необходимо проводить несколько раз, изменяя число разрядов.

В заключение приведем табл. 3 рекомендованных в [7] чисел разрядов k при различном объеме выборочных значений n .

Таблица 3

k	16	20	24	27	30	35	39
n	200	400	600	800	1000	1500	2000

В качестве сглаживавших аналитических распределений могут быть использованы плотности вероятности, приведенные в прил. [9]. В приложении 1 настоящего пособия приведена структурная схема программы и программа для построения гистограммы с помощью ЭВМ.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И ШИРИНЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА СТАЦИОНАРНЫХ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Как уже отмечалось в разд. 5, для эргодических случайных процессов усреднение по множеству реализаций в фиксированный момент времени эквивалентно усреднению по времени одной реализации достаточно большой протяженности.

Так как протяженность реализаций, используемых при экспериментальной обработке, конечна, то получаемые из опыта оценки статистических характеристик являются случайными величинами.

Допустим, что в нашем распоряжении имеется равномерная случайная последовательность $X(iT_0)$, полученная в результате дискретных отсчетов через интервал T_0 значений из непрерывной реализации $x_k(t)$ случайного эргодического процесса $X(t)$ (рис. 7.1).

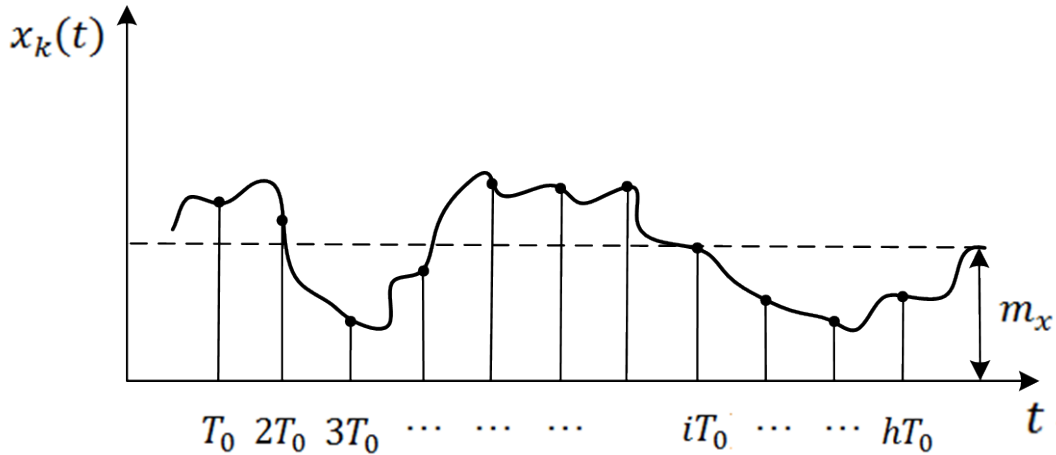


Рис. 7.1

Тогда корреляционная функция $K_x(\tau)$ случайной функции $X(t)$ может быть определена с помощью выражения (5.7), а корреляционная функция равномерной случайной последовательности с помощью выражения (5.8). В результате определения корреляционной функции по реализации конечной длительности получим оценку корреляционной функции $K_x^*(kT_0)$, которая может быть определена из выражения

$$K_x^*(kT_0) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} [x(iT_0) - m_x^*] [x(hT_0) - m_x^*], \quad (7.1)$$

где $k=h-i$; $k=0,1,2, \dots$ – оценка математического ожидания.

Меняя значение $i = 0, 1, 2, \dots l$, получим ряд значений оценок $K_x^*(kT_0)$, которые и служат основой для построения непрерывной кривой $K_x^*(\tau)$ (рис. 7.2).

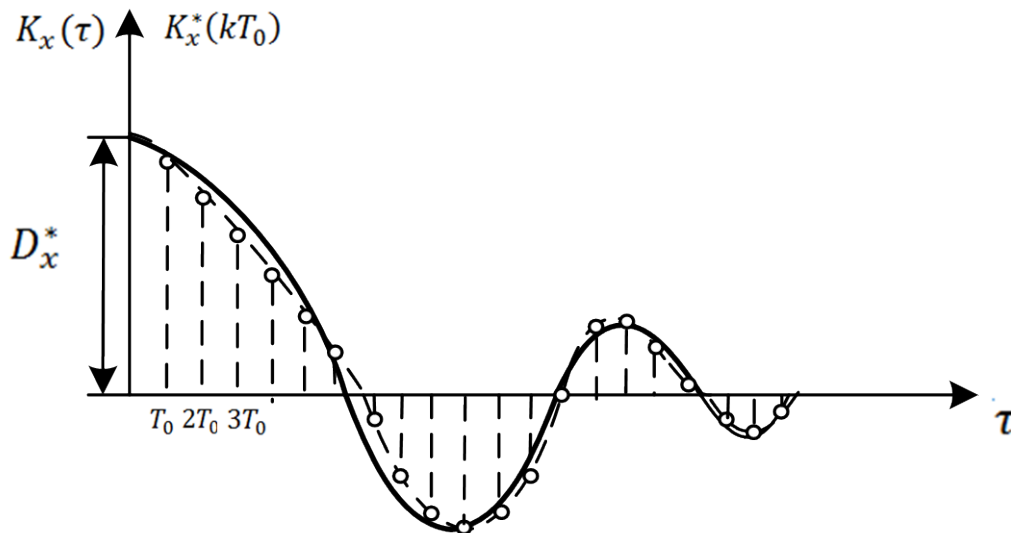


Рис. 7.2

При выполнении курсовой работы ориентировочно количество дискретов корреляционной функции $K_x^*(kT_0) - l$, можно определить, пользуясь соотношением

$$|K_x^*(lT_0)| \leq |0,1K_x^*(0)|. \quad (7.2)$$

На рис. 7.2 график $K_x^*(kT_0)$ представлен в виде точек, соединенных пунктирной линией. Некоторые колебания, не вполне гладкий ход экспериментальной корреляционной функции могут быть объяснены недостаточной длительностью исследуемой реализации. Чтобы сгладить явно незакономерные колебания экспериментально найденной функции $K_x^*(kT_0)$, ее заменяют подходящей аналитической функцией $K_x(\tau)$, параметры которой можно определить методом наименьших квадратов [3,4], или другим методом выравнивания экспериментальных данных, изложение которых можно найти в [4,8,10].

При анализе полученных экспериментальным путем оценок, а также расчете статистических погрешностей измерений часто пользуются понятием интервала корреляции.

Существуют различные определения интервалов корреляции. Приведем наиболее часто используемые определения [1]. Под интервалом корреляции τ_k случайной функции $X(t)$ будем понимать временной интервал, определяемый из равенства (рис. 7.3).

$$\tau_k = \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau. \quad (7.3)$$

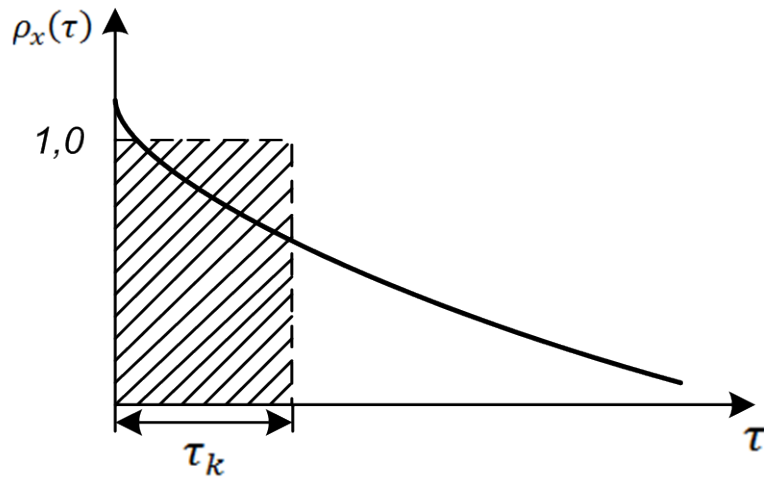


Рис. 7.3

Для знакопеременных функций корреляции пользуются понятием абсолютного интервала корреляции (рис. 7.4).

$$\tau_{ka} = \int_0^{\infty} |\rho_x(\tau)| d\tau. \quad (7.4)$$

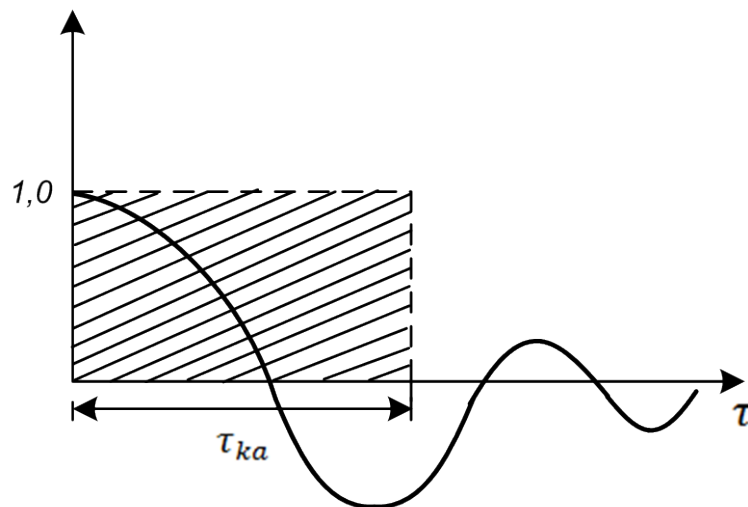


Рис. 7.4

Так как величины τ_k и τ_{ka} дают представление о временных интервалах, на которых в среднем имеет место корреляционная зависимость между отсчетами случайного процесса, то с их помощью можно ориентировочно выбрать интервал дискретизации T_0 .

Для определения интервала дискретизации T_0 можно воспользоваться также понятием максимального интервала корреляции τ_{mk} .

Это временной интервал, за пределами которого корреляционная зависимость между значениями реализации процесса пренебрежимо мала (часто принимают $\rho(\tau_{mk}) \approx 0,05$), рис. 7.5).

При оценке статистических погрешностей часто используют квадратичный интервал корреляции

$$\tau_{ккв} = \int_0^{\infty} \rho_x^2(\tau) d\tau. \quad (7.5)$$

Приведем связь между шириной энергетического спектра и интервалом корреляции.

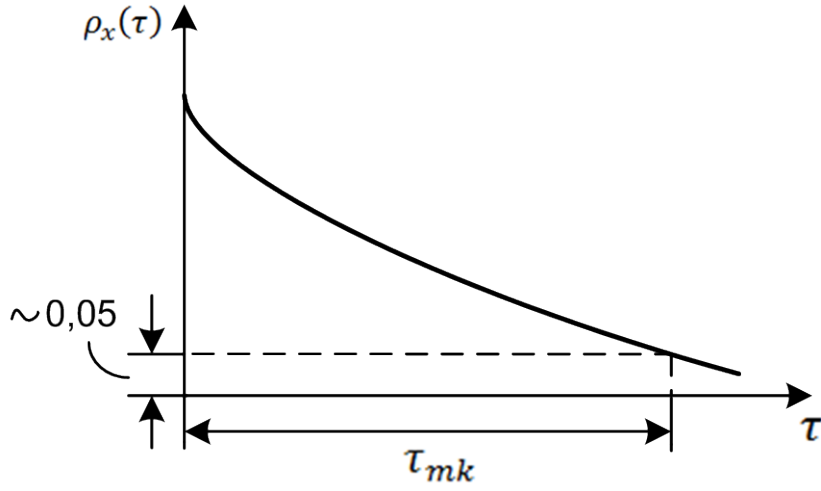


Рис. 7.5

Если в (5.22) $f = 0$, то будем иметь

$$g_x(0) = 2 \int_0^{\infty} \rho_x(\tau) d\tau = 2 \tau_k. \quad (7.6)$$

откуда следует

$$\tau_k = \frac{1}{2} g_x(0). \quad (7.7)$$

В [2] приведено соотношение для ширины спектра мощности процесса

$$\Delta F_x = \frac{\int_0^{\infty} G_x(f) df}{G_{x \max}(f)}. \quad (7.8)$$

Разделим числитель и знаменатель (7.8) на σ_x^2 , тогда получим

$$\Delta F_x = \frac{\int_0^{\infty} g_x(f) df}{g_{x \max}(f)}. \quad (7.9)$$

Учитывая, что $g_{x \max}(f) = 1$, а согласно уравнению (5.21):

$$2 \int_0^{\infty} g_x(f) df = 1. \quad (7.10)$$

то с учетом (7.10) формулу (7.9) можно записать так:

$$\Delta F_x \tau_k = \frac{1}{4}. \quad (7.11)$$

В заключение отметим, что в приложении 2 настоящего пособия приведена структурная схема программы и для вычисления оценок статистических характеристик (математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции) случайных функций.

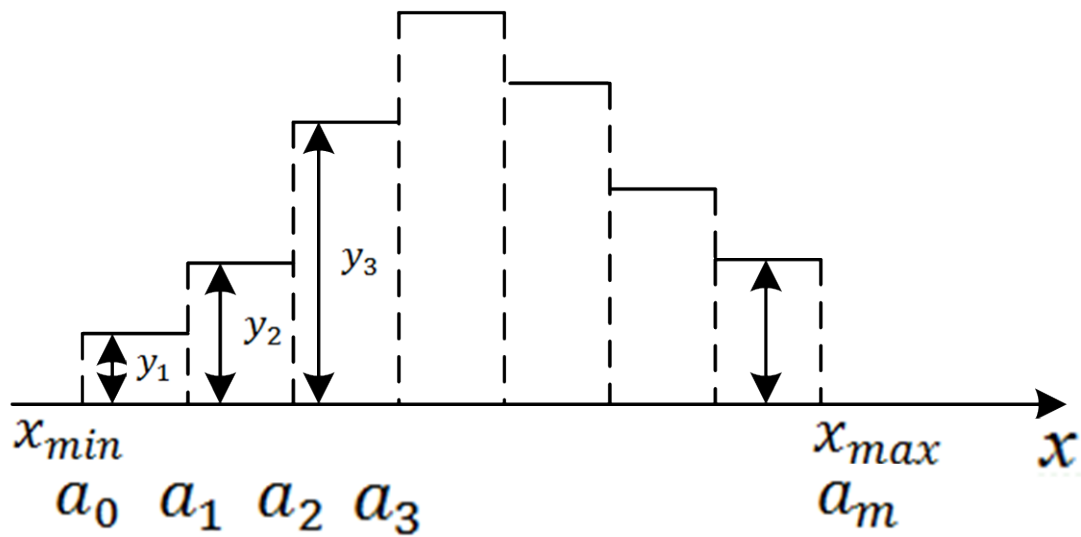
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мирский Г.Я. Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. – 2-е изд. – М.: Энергия, 1972. – 456 с.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – 3-е изд. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник/ Е.С. Вентцель. – 11-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 664 с.
4. Абергауд Г.Г. и др. Справочник по вероятностным расчетам. – 2-е изд. – М.: Воениздат, 1970.
5. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – М.: Наука, 1967.
6. Смирнов Н.В., Дунин-Варковский И.В. Теория вероятностей и математическая статистика для технических приложений. – М.: Наука, 1960.
7. Дж. Бердат, А. Пирсол. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974.
8. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971.
9. Зездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. – М.: Связь, 1969.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.
11. Ольшевский В.В, Основы теории статистических измерений: Конспект лекций. – Таганрог: Изд-во ТРТИ, 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Оценка параметров случайных функций	4
2. Свойства оценок и методы оценивания статистических характеристик моделируемых случайных процессов	5
3. Определение и классификация случайных процессов	10
4. Характеристики распределения вероятностей случайного процесса	12
5. Статистические характеристики стационарного эргодического случайного процесса	15
6. Определение законов распределения стационарных эргодических случайных процессов на основе конечного объема выборочных значений из реализаций этих процессов	18
7. Определение оценок корреляционных функций и ширины энергетического спектра стационарных эргодических случайных процессов	26
Библиографический список	31
Приложение 1	33
Приложение 2	36

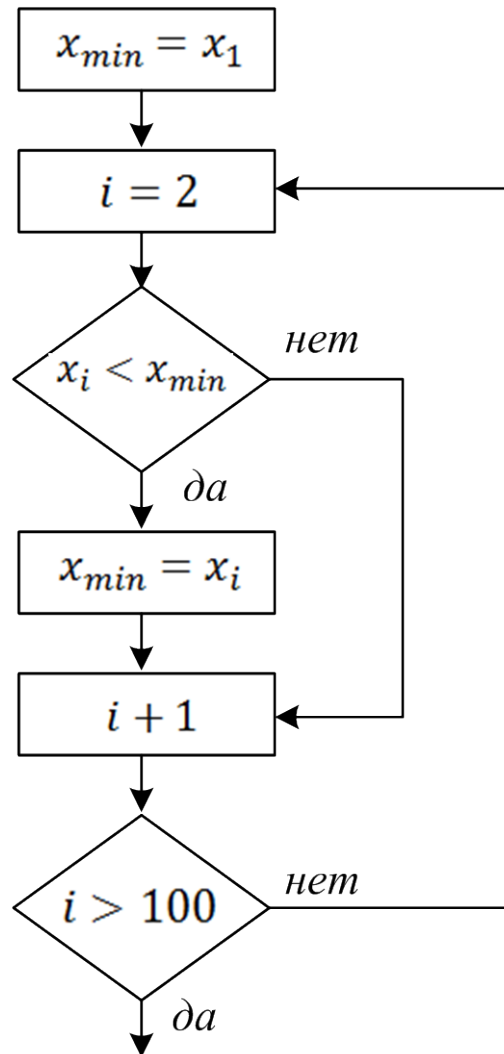
Расчет гистограммы



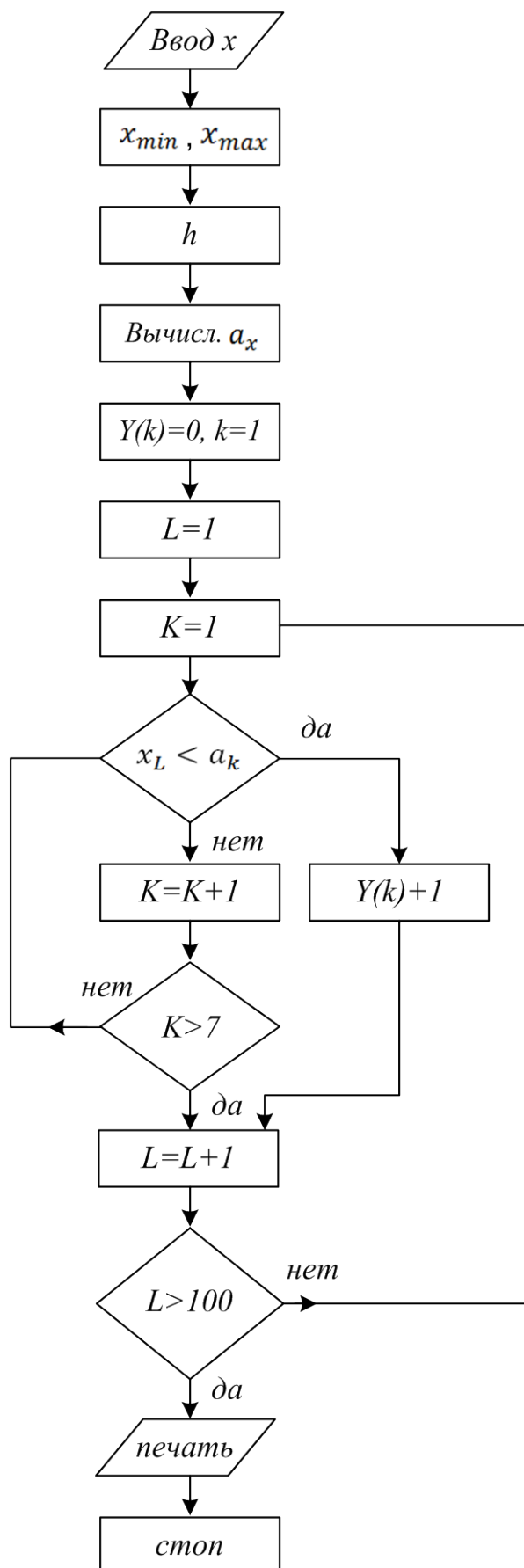
Список идентификаторов

x	$X(N)$ - входной массив
a	$A(M)$
y	$Y(M)$
h	H
x_{min}	XIN
x_{max}	XAX
n	N
m	M

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{M}$$

Структурная схема программы нахождения x_{min} 

Структурная схема программы (N=100; M=7)



Вычисление статистических характеристик

Список идентификаторов

x	$X(N)$ - массив $x_1, x_2, \dots, x_n$
m_x^*	MX
D_x^*	DX
$K_x^*(S)$	$KX(S)$
n	N
s	S
z	Z

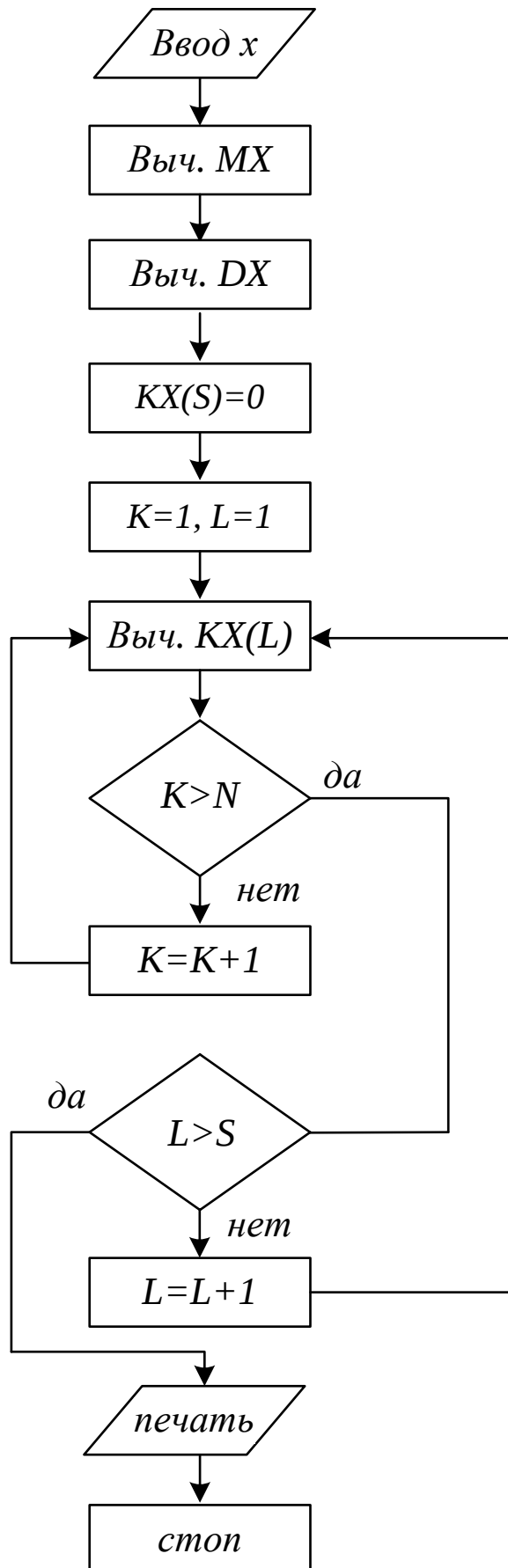
Расчетные формулы

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n};$$

$$D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n - 1};$$

$$K_x^*(s) = \frac{1}{(n - s)D_x^*} \sum_{i=1}^{n-s} (x_i - m_x^*)(x_{i+s} - m_x^*) .$$

Структурная схема программы для вычисления MX , DX , $KX(s)$



Галустов Геннадий Григорьевич
Мелешкин Сергей Николаевич

Автоматизированная обработка
реализаций случайных процессов

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск
Компьютерная верстка
Редактор
Корректор

Мелешкин С.Н.
Мелешкин С.Н.
Надточий З.И.
Надточий З.И.

Подписано в печать
Формат 60х84/16.

Усл. п.л. – 2,5.
Заказ № 10

Уч.-изд. л. – 2,4.
Тираж 10 экз.

Издательство Южного федерального университета
344091, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1.
Тел. (863)2434166, 2434266.

Отпечатано в Секторе обеспечения полиграфической продукцией в
г. Таганроге отдела полиграфической, корпоративной и сувенирной
продукции ИПК КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1 Тел. (8634)371717.