22. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.

<u>Раздел 7.</u> Элементы теории случайных процессов (11+18 часов).

23. Случайные процессы. Характеристики случайных процессов.

24. Стационарные случайные процессы. Эргодические случайные процессы.

Задания для контрольных работ

Контрольная работа 1

<u>Задание 1</u>

Выполнить указанные операции над множествами $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{4,6,7\}$ - подмножествами множества N - натуральных чисел.

Вариант 1 $(A\cup B\cup C)\cap\overline{A}$. Вариант 2 $(A\cup B\cup C)\cap\overline{C}$.

Вариант 3 $((A\cup B)\setminus C)\cap A$. Вариант 4 $(A\cup(B\setminus C))\cap B$.

Вариант 5 $(A\cup B\cup\overline{C})\cap C$. Вариант 6 $((A\setminus B)\cup\overline{C})\cap A$.

Вариант 7 $((B\setminus A)\cup C)\cap B$. Вариант 8 $(A\cup\overline{B}\cup\overline{C})\cap C$.

Вариант 9 $(B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})$. Вариант 10 $(A\setminus C)\cup(B\cap C)$.

<u>Задание 2</u>

Найти сумму, произведение и частное чисел z_1 и z_2.

Вариант 1 $z_1=-2+i$, $z_2=4-3i$.

Вариант 2 $z_1=3-2i$, $z_2=2+5i$.

Вариант 3 $z_1=-4+i$, $z_2=5-2i$.

Вариант 4 $z_1=-1+3i$, $z_2=-3+2i$.

Вариант 5 $z_1=7+2i$, $z_2=-6-i$.

Вариант 6 $z_1=4+3i$, $z_2=-2+5i$.

Вариант 7 $z_1=-2-3i$, $z_2=3-4i$.

Вариант 8 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 - 2i$.

Вариант 9 $z_1 = -3 - 4i$, $z_2 = 1 - 3i$.

Вариант 10 $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 - 2i$.

Задание 3

Решить уравнения.

Вариант 1 а) $2z^2 + 3z + 4 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{\left(-\sqrt{3} - i\right)^7 i^{33}}{(2 + 2i)^{10}} = 0$.

Вариант 2 а) $z^2 - 2z + 2 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{(-3 - 3i)^9}{i^{18}\left(\sqrt{3} - 3i\right)^8} = 0$.

Вариант 3 а) $z^2 + 5z + 8 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{i^{57}\left(-2\sqrt{3} - 6i\right)^5}{(-4 + 4i)^{10}} = 0$.

Вариант 4 а) $z^2 - 4z + 13 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{\left(4\sqrt{3} - 12i\right)^8}{i^{13}\left(-3 - \sqrt{3}\, i\right)^{10}} = 0$.

Вариант 5 а) $-z^2 + z - 2 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{i^{59}(-2 + 2i)^{11}}{\left(8 - 8\sqrt{3}\, i\right)^9} = 0$.

Вариант 6 а) $z^2 - 2z + 7 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{\left(3 + \sqrt{3} i\right)^{10}}{\left(-4 + 4\sqrt{3}\, i\right)^{11} i^9} = 0$.

Вариант 7 а) $2z^2 + 5z + 7 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{\left(2 + \sqrt{3}\, i\right)^{10}}{i^{35}(-2 - 2i)^9} = 0$.

Вариант 8 а) $-4z^2 - 4z - 3 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{i^{29}\left(2 + 2\sqrt{3} i\right)^9}{\left(3 - \sqrt{3} i\right)^{14}} = 0$.

Вариант 9 а) $3z^2 + 2z + 9 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{2} i\right)^7}{i^{11}\left(-6 + 2\sqrt{3} i\right)^{13}} = 0$.

Вариант 10 а) $4z^2 + z + 2 = 0$; б) $z^3 + \dfrac{(3 + 3i)^5}{i^{17}\left(-2 - 2\sqrt{3} i\right)^7} = 0$.

Задание 4

Найти все нули многочлена и разложить его на неприводимые множители с действительными коэффициентами, если известен один из его нулей z_1.

Вариант 1 $z^4 + 2z^3 - 4z + 12$, $z_1 = 1 + i$.

Вариант 2 $z^4 - 2z^3 + 4z + 12$, $z_1 = 2 + \sqrt{2} i$.

Вариант 3 $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 4z + 24$, $z_1 = 1 + \sqrt{3} i$.

Вариант 4 $z^4 + 7z^3 + 21z^2 + 30z + 18$, $z_1 = -2 + \sqrt{2} i$.

Вариант 5 $z^4 + 5z^3 + 14z^2 + 20z + 16$, $z_1 = -1 + \sqrt{3} i$.

Вариант 6 $z^4 + 5z^3 + 11z^2 + 12z + 6$, $z_1 = -1 + i$.

Вариант 7 $z^4 + 3z^3 + 8z^2 + 7z + 5$, $z_1 = -1 + 2i$.

Вариант 8 $z^4 + z^3 + 3z^2 + 7z + 20$, $z_1 = 1 - 2i$.

Вариант 9 $z^4 - z^3 - 3z^2 - z + 20$, $z_1 = 2 - i$.

Вариант 10 $z^4 + 5z^3 + 13z^2 + 12z + 8$, $z_1 = -2 + 2i$.

Задание 5

Даны многочлены $f(z)$ и $g(z)$.

Требуется:

а) подобрать целые нули многочлена $f(z)$ среди делителей свободного члена;

б) разложить многочлен $f(z)$ на линейные и неприводимые квадратичные множители с действительными коэффициентами;

в) разложить многочлен $f(z)$ на линейные множители с комплексными коэффициентами;

г) представить дробь $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ в виде суммы простейших дробей с действительными коэффициентами.

Вариант 1 $f(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4$, $g(z) = z^2 - 2z - 3$.

Вариант 2 $f(z)=z^4-4z^3+2z^2+z+6$, $g(z)=z^2-2z-4$.

Вариант 3 $f(z)=z^4-5z^3+3z^2+2z+8$, $g(z)=z^2-3z-5$.

Вариант 4 $f(z)=z^4-2z^2-3z-2$, $g(z)=z^2+z-2$.

Вариант 5 $f(z)=z^4-6z^3+4z^2+3z+10$, $g(z)=z^2-5z-6$.

Вариант 6 $f(z)=z^4-z^3-4z^2-5z-3$, $g(z)=z^2-3z-5$.

Вариант 7 $f(z)=z^4-7z^3+5z^2+4z+12$, $g(z)=z^2-6z-5$.

Вариант 8 $f(z)=z^4-2z^3-6z^2-7z-4$, $g(z)=z^2-4z-6$.

Вариант 9 $f(z)=z^4-3z^3-8z^2-9z-5$, $g(z)=z^2-5z-7$.

Вариант 10 $f(z)=z^4-4z^3-10z^2-11z-6$, $g(z)=z^2-6z-8$.

Контрольная работа 2

Задание 1

Даны матрицы A, B, C и числа α и β.

Найти $\alpha \cdot A^2+\beta \cdot BC$.

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix}-5&1&2\\3&-1&4\\-1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&4&-2&6\\0&-1&1&-3\\-2&5&2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&-1&3\\2&5&1\\-4&4&7\\1&6&5\end{pmatrix},$$

$$\alpha=-2,\quad \beta=3.$$

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\1&6&-2\\3&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&1&4&-2\\2&3&-5&1\\7&0&-1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&0&2\\5&-1&3\\2&3&6\end{pmatrix},$$

$$\alpha=2,\quad \beta=-3.$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix}-4&1&-2\\0&-1&1\\2&3&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&0&-1&2\\-2&3&1&1\\1&2&4&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&-1&1\\0&4&-2\\5&0&-3\end{pmatrix},$$

$$\alpha=2,\quad \beta=-3.$$

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix}-3&0&2\\4&1&-3\\1&-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&-1&4\\1&3&5&-1\\0&-2&2&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-2&4&0\\-5&2&1\\-1&3&-4\end{pmatrix},$$

$$\alpha=3,\quad \beta=-2.$$

Вариант 5

$$A=\begin{pmatrix}-5&-2&3\\1&0&-1\\4&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&2&1&7\\-1&0&-2&1\\4&5&0&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-2&4\\3&-1&0\\5&-3&1\\2&-4&3\end{pmatrix},$$

$$\alpha=-1,\quad \beta=-2.$$

Вариант 6

$$A=\begin{pmatrix}-2&6&1\\3&1&5\\0&4&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2&-1&3\\1&4&5&1\\-2&1&2&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&2&4\\5&0&1\\-1&1&-4\end{pmatrix},$$

$$\alpha=2,\quad \beta=-1.$$

Вариант 7

$$A=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\1&1&3\\-2&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&3&1\\0&4&1&5\\1&0&-2&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1&-2\\2&-1&3\\-3&4&0\\5&1&1\end{pmatrix},$$

$$\alpha=1,\quad \beta=4.$$

Вариант 8

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&1&1\\-2&4&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&3&2\\3&1&-2&0\\1&4&1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&5\\0&4&-1\\-3&2&2\end{pmatrix},$$

$$\alpha=2,\quad \beta=-2.$$

Вариант 9

$$A=\begin{pmatrix}-2&5&-1\\3&1&1\\4&-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-4&1&3\\-1&3&5&1\\-3&1&1&4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&2&5\\1&-1&1\\0&4&-1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha=-3,\quad \beta=1.$$

Вариант 10

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&1\\2&5&0\\-3&1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&3&1&4\\1&0&2&3\\-1&4&5&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&1\\-4&0&1\\1&5&2\end{pmatrix},$$

$$\alpha=2,\quad \beta=-1.$$

Задание 2

Решить матричные уравнения:

а) $AX=B$;

б) $XA=B$;

в) $AXC=B$.

Вариант 1 $A=\begin{pmatrix}-4&1\\2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3&1\\-1&2\end{pmatrix}.$

Вариант 2 $A=\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&4\end{pmatrix}.$

Вариант 3 $A=\begin{pmatrix}-5&0\\2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&3\\2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&4\\1&2\end{pmatrix}.$

Вариант 4 $A=\begin{pmatrix}1&3\\-6&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}.$

Вариант 5 $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7&-1\\-2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-4&-2\\1&3\end{pmatrix}.$

Вариант 6 $A=\begin{pmatrix}-9&2\\4&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-8\\2&7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-4\\2&1\end{pmatrix}.$

Вариант 7 $A=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&-8\\2&7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-5\end{pmatrix}.$

Вариант 8 $A=\begin{pmatrix}5&-7\\-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&2\\1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3&2\\1&-1\end{pmatrix}.$

Вариант 9 $A=\begin{pmatrix}10&2\\4&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7&5\\2&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&3\end{pmatrix}.$

Вариант 10 $A=\begin{pmatrix}-2&5\\1&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}.$

Задание 3

Решить систему уравнений:

а) по правилу Крамера;

б) методом Гаусса;

в) матричным методом.

Вариант 1 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=-6,\\-x_1+2x_2+x_3=5,\\x_1+6x_2+3x_3=-1.\end{cases}$ Вариант 2 $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=-1,\\-3x_1-x_2+x_3=-1,\\-x_1+4x_2+5x_3=-8.\end{cases}$

Вариант 3 $\begin{cases}-2x_1-x_2+x_3=10,\\3x_1+2x_2-x_3=-14,\\-x_1+3x_2+2x_3=6.\end{cases}$ Вариант 4 $\begin{cases}-5x_1-2x_2+x_3=-10,\\4x_1+3x_2-2x_3=7,\\x_1-6x_2+5x_3=2.\end{cases}$

Вариант 5 $\begin{cases}2x_1-2x_2+5x_3=-12,\\ x_1+3x_2+7x_3=2,\\ -x_1-5x_2+x_3=-6.\end{cases}$ Вариант 6 $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=-5,\\ 3x_1+4x_2+2x_3=0,\\ -2x_1+5x_2+x_3=7.\end{cases}$

Вариант 7 $\begin{cases}-2x_1+x_2-3x_3=-11,\\ x_1+\ \ 3x_2=\ \ 6,\\ 3x_1-5x_2-x_3=3.\end{cases}$ Вариант 8 $\begin{cases}4x_1-x_2+3x_3=5,\\ x_1+2x_2+4x_3=0,\\ -3x_1+3x_2-5x_3=-11.\end{cases}$

Вариант 9 $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=2,\\ 5x_1\quad\ +2x_3=18,\\ -3x_1+x_2-6x_3=-7.\end{cases}$ Вариант 10 $\begin{cases}5x_1+4x_2-x_3=-5,\\ -3x_1-6x_2+2x_3=5;\\ 2x_1-3x_2-4x_3=-21.\end{cases}$

<u>Задание 4</u>

Решить системы уравнений.

Вариант 1 а) $\begin{cases}5x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=3,\\ x_1-4x_2+2x_3+x_4+x_5=0,\\ 2x_1+x_2+x_3-3x_4-x_5=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-x_1+5x_2+3x_3-2x_4+x_5=-2,\\ 5x_1-4x_2-2x_3+x_4+x_5=3,\\ 3x_1+6x_2+4x_3-3x_4+3x_5=4.\end{cases}$

Вариант 2 а) $\begin{cases}2x_1-x_2+6x_3+4x_4-3x_5=-4,\\ -x_1+3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=3,\\ 3x_1+x_2+16x_3+2x_4-x_5=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-x_1+2x_2-5x_3+4x_4-x_5=-2,\\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4+4x_5=-1,\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+7x_5=3.\end{cases}$

Вариант 3 а) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-3x_4+x_5=4,\\ -3x_1-6x_2+2x_3+3x_4-x_5=-2,\\ -x_1-2x_2-3x_4+x_5=6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-x_1+8x_2+2x_3+4x_4+3x_5=-1,\\ -x_1-3x_2+5x_3-2x_4+6x_5=2,\\ -4x_1-x_2+17x_3-2x_4+21x_5=-2.\end{cases}$

Вариант 4 а) $\begin{cases}3x_1+5x_2-x_3+2x_4+x_5=3,\\ -4x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0,\\ x_1+2x_2+x_3-3x_4-x_5=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-2x_1+5x_2+3x_3-x_4+x_5=-2,\\ x_1-4x_2-2x_3+5x_4+x_5=3,\\ -3x_1+6x_2+4x_3+3x_4+3x_5=4.\end{cases}$

Вариант 5 а) $\begin{cases}-x_1+2x_2+6x_3+4x_4-3x_5=-4,\\ 3x_1-x_2+4x_3-5x_4+2x_5=3,\\ x_1+3x_2+16x_3+2x_4-x_5=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-5x_1+2x_2-x_3+4x_4-x_5=-2,\\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4+4x_5=-1,\\ x_1+4x_2+3x_3+2x_4+7x_5=3.\end{cases}$

Вариант 6 а) $\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3-3x_4+x_5=4,\\ 2x_1-6x_2-3x_3+3x_4-x_5=-2,\\ -2x_2-x_3-3x_4+x_5=6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x_1-7x_2-x_3+5x_4-x_5=8,\\ 3x_1+2x_2+6x_3-x_4+4x_5=-3,\\ 5x_1-12x_2+4x_3+9x_4+2x_5=2.\end{cases}$

Вариант 7 а) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+5x_4+x_5=3,\\ x_1-4x_2+2x_3+x_4+x_5=0,\\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}8x_1-x_2+2x_3+4x_4+3x_5=-1,\\ -3x_1-x_2+5x_3-2x_4+6x_5=2,\\ -x_1-4x_2+17x_3-2x_4+21x_5=-2.\end{cases}$

Вариант 8 а) $\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 + 16x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x_1 - 7x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 + 3x_5 = -3, \\ 2x_1 - 12x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 2. \end{cases}$

Вариант 9 а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 - x_5 = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = -1, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

Вариант 10 а) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -2, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$

<u>Задание 5</u>

Даны вершины пирамиды $ABCD$ и точка $P(x, y, z)$.

Найти:

а) длину ребра AB;

б) косинус угла между ребрами AB и CD;

в) площадь грани ABC;

г) объем пирамиды;

д) уравнение прямой, на которой лежит ребро AB;

е) уравнение прямой, на которой лежит высота h_A пирамиды, опущенная из вершины A.

Выяснить, лежат ли точки D и P по одну сторону плоскости грани ABC или по разные?

Вариант 1 $A(4,2,5)$, $B(0,7,2,)$, $C(0,2,7)$, $D(1,5,4)$, $P(1,2,5)$.

Вариант 2 $A(1,3,8)$, $B(0,3,7)$, $C(2,4,6)$, $D(1,2,8)$, $P(1,3,7)$.

Вариант 3 $A(-1,2,3)$, $B(1,4,3)$, $C(3,5,2)$, $D(1,2,4)$, $P(2,6,8)$.

Вариант 4 $A(1,2,3)$, $B(3,4,2)$, $C(2,2,6)$, $D(1,3,6)$, $P(2,3,5)$.

Вариант 5 $A(-1,2,4)$, $B(1,1,1)$, $C(2,0,6)$, $D(-2,5,-1)$, $P(1,2,2)$.

Вариант 6 $A(3,2,-5)$, $B(5,-3,-2)$, $C(-5,-3,2)$, $D(2,-5,3)$, $P(1,-2,-1)$.

Вариант 7 $A(2,-5,3)$, $B(3,2,-5)$, $C(5,-3,-2)$, $D(-5,-3,2)$, $P(1,-2,-1)$.

Вариант 8 $A(4,-1,-3)$, $B(0,0,6)$, $C(4,0,-4)$, $D(1,3,-1)$, $P(2,1,1)$.

Вариант 9 $A(-5,-4,8)$, $B(2,3,1)$, $C(4,1,-2)$, $D(6,3,7)$, $P(2,1,4)$.

Вариант 10 $A(1,3,-1)$, $B(4,-1,-3)$, $C(0,0,6)$, $D(4,0,-4)$, $P(2,1,-1)$.

<u>Задание 6</u>

Кривая в полярной системе координат задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$.

Требуется:

а) изобразить кривую по точкам, придавая φ значения из промежутка $[0; 2\pi)$ с шагом $\pi/8$;

б) записать уравнение этой кривой в декартовой прямоугольной системе координат, согласованной с полярной, и определить тип этой кривой.

Вариант 1 $\rho = \dfrac{2}{1-\cos\varphi}$. Вариант 2 $\rho = \dfrac{5}{1+\sin\varphi}$.

Вариант 3 $\rho = \dfrac{2}{1-3\sin\varphi}$. Вариант 4 $\rho = \dfrac{1}{3-2\cos\varphi}$.

Вариант 5 $\rho = \dfrac{2}{2+3\sin\varphi}$. Вариант 6 $\rho = \dfrac{3}{4-3\sin\varphi}$.

Вариант 7 $\rho = \dfrac{2}{2-3\cos\varphi}$. Вариант 8 $\rho = \dfrac{1}{3+\sin\varphi}$.

Вариант 9 $\rho = \dfrac{2}{4-\sin\varphi}$. Вариант 10 $\rho = \dfrac{5}{4+4\cos\varphi}$.

Контрольная работа 3

Задание 1

Образует ли линейное подпространство пространства R^4 множество V, заданное по правилу:

Вариант 1 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-2x_3=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_3+x_4=1\}$.

Вариант 2 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_2+x_3=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_2-x_4=1\}$.

Вариант 3 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1+2x_4=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):3x_1-x_4=5\}$.

Вариант 4 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_4-x_3=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):5x_2+x_3=2\}$.

Вариант 5 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):3x_2+2x_3=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_1-x_2=1\}$.

Вариант 6 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):5x_4+2x_2=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_1-3x_4=5\}$.

Вариант 7 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_2+x_3=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):5x_2-x_1=4\}$.

Вариант 8 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_1+2x_4=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-2x_4=5\}$.

Вариант 9 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_3-x_2=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-4x_4=1\}$.

Вариант 10 а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):2x_2+x_4=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-5x_4=2\}$.

Задание 2

Даны векторы e_1,e_2,e_3,e_4 и a в стандартном базисе пространства R^4.

Требуется:

а) убедиться, что векторы e_1,e_2,e_3 и e_4 образуют базис пространства R^4;

б) найти разложение вектора a по этому базису;

в) найти угол между векторами e_1 и e_2.

Вариант 1 $e_1=(1,0,-2,3)$, $e_2=(0,1,3,2)$, $e_3=(1,0,0,1)$, $e_4=(2,3,12,2)$, $a=(9,12,5,8)$.

Вариант 2 $e_1=(1,0,1,-1)$, $e_2=(1,1,1,-1)$, $e_3=(1,1,1,1)$, $e_4=(1,2,2,3)$, $a=(2,0,1,2)$.

Вариант 3 $e_1=(1,0,3,2)$, $e_2=(-1,-1,2,1)$, $e_3=(1,1,1,-1)$, $e_4=(1,1,2,1)$, $a=(1,0,1,-2)$.

Вариант 4 $e_1=(0,0,2,-3)$, $e_2=(-1,-5,-1,-5)$, $e_3=(1,4,2,0)$, $e_4=(1,4,1,1)$, $a=(1,2,1,3)$.

Вариант 5 $e_1=(0,1,-1,1)$, $e_2=(1,-1,1,-1)$, $e_3=(2,1,2,3)$, $e_4=(5,0,2,2)$, $a=(4,3,1,-1)$.

Вариант 6 $e_1=(-1,1,0,1)$, $e_2=(-1,1,1,1)$, $e_3=(7,-5,3,-6)$, $e_4=(5,-2,4,-3)$, $a=(3,-2,1,0)$.

Вариант 7 $e_1=(1,0,-1,1)$, $e_2=(-1,-1,1,-1)$, $e_3=(3,8,-2,4)$, $e_4=(5,9,-4,7)$, $a=(1,2,-2,3)$.

Вариант 8 $e_1=(0,-1,1,1)$, $e_2=(1,-1,1,1)$, $e_3=(12,5,-4,-2)$, $e_4=(13,8,-6,-3)$, $a=(2,3,2,0)$.

Вариант 9 $e_1=(1,-1,1,0)$, $e_2=(-1,1,-1,1)$, $e_3=(7,-6,10,9)$, $e_4=(5,-4,7,8)$, $a=(0,2,3,3)$.

Вариант 10 $e_1=(-1,0,-1,1)$, $e_2=(1,1,1,-1)$, $e_3=(4,5,5,-3)$, $e_4=(8,9,6,-9)$, $a=(2,0,2,1)$.

Задание 3

Установить, являются ли заданные отображения $A: R^4\to R^4$ линейными. В случае линейности отображения записать матрицу оператора A в каноническом базисе $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$.

Вариант 1 а) $Ax=\left(x_1-2x_4,\ x_2+x_3,\ -x_1,\ x_1+3x_2\right)$;

б) $Ax=\left(x_1-2x_4,\ x_2\cdot x_3,\ -x_1,\ x_1+3x_2\right)$.

Вариант 2 а) $Ax=\left(x_2+2x_3,\ x_3,\ x_4,\ x_1+x_2\right)$;

б) $Ax=\left(x_2+2x_3,\ x_3,\ x_4,\ x_1+2\right)$.

Вариант 3 а) $Ax=\left(x_1-2x_2,\ x_2+x_3,\ x_3,\ x_4\right)$;

б) $Ax=\left(x_1-2x_2,\ x_2\cdot x_3,\ x_3,\ x_4\right)$.

Вариант 4 а) $Ax=\left(x_1-x_2,\ x_2-x_3,\ x_3-x_4,\ x_3\right)$;

б) $Ax=\left(x_1-x_2,\ x_2-x_3,\ x_3-x_4,\ x_3\cdot x_3\right)$.

Вариант 5 а) $Ax=\left(x_1+3x_2,\ x_2,\ x_2+x_4,\ x_4\right)$;

б) $Ax=\left(x_1+3,\ x_2,\ x_3+x_4,\ x_4\right)$.

Вариант 6 а) $Ax=\left(2x_1,\ 3x_3,\ x_1+x_2,\ x_4\right)$;

б) $Ax=\left(2,\ 3x_3,\ x_1+x_2,\ x_4\right)$.

Вариант 7 а) $Ax=\left(x_2,\ x_3,\ x_1+x_3,\ x_4+x_2\right)$;

б) $Ax=\left(x_2^2,\ x_3,\ x_1+x_3,\ x_4+x_2\right)$.

Вариант 8 а) $Ax=\left(x_1+2x_2,\ x_2,\ x_2+x_4,\ x_3\right)$;

б) $Ax=\left(x_1+2,\ x_3,\ x_3+x_4,\ x_3\right)$.

Вариант 9 а) $Ax=\left(-x_1,\ x_1+x_2,\ x_3,\ x_4+x_2\right)$;

б) $Ax=\left(x_1^{-1},\ x_1+x_2,\ x_3,\ x_4+x_2\right)$.

Вариант 10 а) $Ax=\left(x_4,\ x_2+x_3,\ 2x_1,\ x_4\right)$;

б) $Ax=\left(x_4,\ x_2\cdot x_3,\ 2x_1,\ x_4\right)$.

Задание 4

Линейный оператор $A: R^3\to R^3$ в базисе e_1,e_2,e_3 представлен данной матрицей. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе f_1,f_2,f_3.

Вариант 1 $A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&3&-4\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=e_1-e_2+3e_3,\\f_2=4e_1+e_2-e_3,\\f_3=2e_1-3e_2.\end{cases}$

Вариант 2 $A=\begin{pmatrix}1&4&0\\2&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=2e_1+e_2+4e_3,\\f_2=e_1-e_2-2e_3,\\f_3=e_2+2e_3.\end{cases}$

Вариант 3 $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&4&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=3e_1+2e_2+e_3,\\f_2=-e_1-e_3,\\f_3=-e_1+4e_2+e_3.\end{cases}$

Вариант 4 $A=\begin{pmatrix}2&3&-3\\-1&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=-2e_1+e_3,\\f_2=-2e_1+3e_2+2e_3,\\f_3=-2e_1+2e_2+e_3.\end{cases}$

Вариант 5 $A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\2&-2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=-2e_2-e_3,\\f_2=2e_1-3e_2+3e_3,\\f_3=-e_1+e_2+2e_3.\end{cases}$

Вариант 6 $A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&-2&1\\5&2&-5\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=3e_1+3e_2+e_3,\\f_2=-e_2+2e_3,\\f_3=e_1+2e_2-3e_3.\end{cases}$

Вариант 7 $A=\begin{pmatrix}1&-5&1\\2&-1&2\\-1&4&1\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=2e_1+2e_2-e_3,\\f_2=-e_1+2e_2+2e_3,\\f_3=3e_2+e_3.\end{cases}$

Вариант 8 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\-1&1&4\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=2e_1-e_3,\\f_2=-2e_1+e_2+2e_3,\\f_3=2e_1+4e_2-2e_3.\end{cases}$

Вариант 9 $A=\begin{pmatrix}1&1&4\\-2&-3&2\\2&2&-2\end{pmatrix}$, $\begin{cases}f_1=3e_1-2e_2+2e_3,\\f_2=e_1-3e_2,\\f_3=4e_1-e_2+e_3.\end{cases}$

Вариант 10 $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - 4e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$

Задание 5

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в базисе e_1, e_2, e_3 следующей матрицей.

Вариант 1 $A=\begin{pmatrix}10 & 4 & 4\\ -1 & 1 & 0\\ -13 & -6 & -5\end{pmatrix}$. Вариант 2 $A=\begin{pmatrix}-1 & -8 & -8\\ 6 & 28 & 26\\ -6 & -27 & -25\end{pmatrix}$.

Вариант 3 $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 3 & 4 & -7\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Вариант 4 $A=\begin{pmatrix}-12 & -10 & -10\\ -5 & -1 & -2\\ 20 & 14 & 15\end{pmatrix}$.

Вариант 5 $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$. Вариант 6 $A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 8\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

Вариант 7 $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 3\\ 2 & 6 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Вариант 8 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Вариант 9 $A=\begin{pmatrix}-9 & -8 & -8\\ -22 & -11 & -16\\ 34 & 22 & 27\end{pmatrix}$. Вариант 10 $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ -10 & -4 & -20\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Задание 6

Линейным преобразованием координат привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и определить тип кривой.

Вариант 1 $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Вариант 2 $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$.

Вариант 3 $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 8y + 1 = 0$.

Вариант 4 $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

Вариант 5 $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$.

Вариант 6 $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

Вариант 7 $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

Вариант 8 $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

Вариант 9 $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y = 0$.

Вариант 10 $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.

Решение нулевого варианта контрольных работ

Контрольная работа 1

Задание 1

Выполнить указанные операции $((B \setminus C) \cup A) \cap \overline{B}$ над множествами $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{5; 7; 8\}$ - подмножествами множества N натуральных чисел.

Прежде чем решать задачу, изучите п.п. 1, 2 Рабочей программы.

Решение

Разность множеств $B \setminus C$ – это множество, состоящее из элементов множества $B = \{4; 5; 6; 7\}$, не принадлежащих множеству $C = \{5; 7; 8\}$, то есть $B \setminus C = \{4; 6\}$.

Множество $(B \setminus C) \cup A$ – это множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств $B \setminus C = \{4; 6\}$ и $A = \{2; 3; 4; 5\}$, то есть $(B \setminus C) \cup A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Множество $\overline{B}$ состоит из элементов множества $N = \{1; 2; 3; ...\}$, не принадлежащих $B = \{4; 5; 6; 7\}$, то есть

$\overline{B} = \{1; 2; 3; 8; 9; 10; ...\}$.

Множество $((B \setminus C) \cup A) \cap \overline{B}$ состоит из элементов, принадлежащих и множеству $(B\setminus C)\cup A=\{2;\,3;\,4;\,5;\,6\}$, и множеству $\overline{B}=\{1;\,2;\,3;\,8;\,9;\,10;\,...\}$, то есть

$((B\setminus C)\cup A)\cap\overline{B}=\{2;\,3\}$.

Задание 2

Найдите сумму, произведение и частное комплексных чисел $z_1=5+i$, $z_2=-4-3i$.

Прежде чем решать задачу, изучите п. 3 Рабочей программы.

Решение

Если $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$, то:

1) $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$.

Для решаемой задачи $z_1+z_2=(5-4)+i(1-3)=1-2i$.

2) $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2)$.

Практически комплексные числа, заданные в алгебраической форме, перемножаются как многочлены с учетом того, что $i^2=-1$.
Для решаемой задачи

$z_1\cdot z_2=(5+i)(-4-3i)=-20-4i-15i-3i^2=-20-4i-15i+3=-17-19i.$

3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$.

Практически деление комплексных чисел удобнее выполнять следующим образом

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}.$$

Для решаемой задачи

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5+i}{-4-3i}=-\frac{5+i}{4+3i}=-\frac{(5+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=-\frac{20+4i-15i-3i^2}{4^2+3^2}=$$

$$=-\frac{20+4i-15i+3}{16+9}=-\frac{23-11i}{25}=-\frac{23}{25}+i\frac{11}{25}.$$

Задание 3

Решить уравнения:

а) $2z^2+z+5=0$; б) $z^3+\dfrac{\left(3+\sqrt{3}i\right)^{10}}{\left(-4+4\sqrt{3}i\right)^{11}\cdot i^9}=0$.

Прежде чем решать задачу, изучите п. 3 Рабочей программы.

Решение

а) По известной из курса школьной математики формуле

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm\sqrt{-39}}{4}=\frac{-1\pm i\sqrt{39}}{4}=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{39}}{4}i.$$

Следовательно, $z_1=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{39}}{4}i$, $z_2=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{39}}{4}i$.

б) Для решения уравнения $z^3=-\dfrac{\left(3+\sqrt{3}i\right)^{10}}{\left(-4+4\sqrt{3}i\right)^{11}\cdot i^9}$, то есть уравнения $z^3=\omega$, надо использовать формулу

$$\sqrt[n]{\omega}=\sqrt[n]{|\omega|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)=\sqrt[n]{|\omega|}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},$$

где $k=0,1,2,\ ...\ ,n\text{-}1$, а $|\omega|$ и φ - модуль и аргумент комплексного числа ω.

Поэтому необходимо найти модуль и аргумент комплексного числа $\omega=-\dfrac{\left(3+\sqrt{3}i\right)^{10}}{\left(-4+4\sqrt{3}i\right)^{11}\cdot i^9}$.

Последовательно вычислим

$$\omega_1=\left(3+\sqrt{3}i\right)^{10}=\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+i\right)\right)^{10}=\left(\sqrt{3}\right)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}=3^5\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}.$$

$$\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2,\ \arg\left(\sqrt{3}+i\right)=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

$$\omega_1 = 3^5 \cdot \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{10} = 3^5 \cdot 2^{10} \cdot e^{i\frac{10\pi}{6}} = 3^5 \cdot 2^{10} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Аналогично $\omega_2 = \left(-4+4\sqrt{3}i\right)^{11} = 2^{33} \cdot e^{i\frac{22\pi}{3}} = 2^{33} \cdot e^{i\left(6\pi+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{33} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$i^9 = i^8 \cdot i = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-1 = e^{i\pi}$.

Таким образом, $\omega = \dfrac{e^{i\pi} \cdot 3^5 \cdot 2^{10} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}}{2^{33} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{3^5}{2^{23}} \cdot e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{3^5}{2^{23}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$|\omega| = \dfrac{3^5}{2^{23}}$, $\arg \omega = \dfrac{5\pi}{6}$.

Следовательно,

$$\sqrt[3]{\omega} = \sqrt[3]{\frac{3^5}{2^{23}}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{3^5}{2^{23}}} \cdot \left(\cos\frac{5\pi+12\pi k}{18} + i\sin\frac{5\pi+12\pi k}{18}\right)$$

При $k=0$, получим $z_1 = \sqrt[3]{\dfrac{3^5}{2^{23}}} \cdot \left(\cos\dfrac{5\pi}{18} + i\sin\dfrac{5\pi}{18}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{3^5}{2^{23}}} \cdot e^{i\frac{5\pi}{18}}$.

При $k=1$, получим $z_2 = \sqrt[3]{\dfrac{3^5}{2^{23}}} \cdot \left(\cos\dfrac{17\pi}{18} + i\sin\dfrac{17\pi}{18}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{3^5}{2^{23}}} \cdot e^{i\frac{17\pi}{18}}$.

При $k=2$, получим $z_3 = \sqrt[3]{\dfrac{3^5}{2^{23}}} \cdot \left(\cos\dfrac{29\pi}{18} + i\sin\dfrac{29\pi}{18}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{3^5}{2^{23}}} \cdot e^{i\frac{29\pi}{18}}$.

Задание 4

Найти все нули многочлена $f(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50$ и разложить его на неприводимые сомножители с действительными коэффициентами, если известен один из его нулей $z_1 = 2+i$.

Прежде чем решать задачу, изучите п. 4 Рабочей программы.

Решение

$f(z)$ имеет действительные коэффициенты, поэтому, наряду с нулем $z_1 = 2+i$, нулём $f(z)$ является также $z_2 = \overline{z_1} = 2-i$.

Следовательно, $f(z)$ делится на

$$(z-z_1)(z-\overline{z_1}) = (z-2-i)(z-2+i) = (z-2)^2 - i^2 = z^2 - 4z + 5.$$

Разделим $f(z)$ на $z^2 - 4z + 5$.

$$\begin{array}{r|l}
z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50 & z^2 - 4z + 5 \\ \cline{2-2}
-\underline{z^4 - 4z^3 + 5z^2} & z^2 + 2z + 10 \\
2z^3 + 2z^2 - 30z + 50 & \\
-\underline{2z^3 - 8z^2 + 10z} & \\
10z^2 - 40z + 50 & \\
-\underline{10z^2 - 40z + 50} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, $f(z) = \left(z^2 - 4z + 5\right)\left(z^2 + 2z + 10\right)$.

Найдём нули второго множителя: $z^2 + 2z + 10 = 0$, $z_{3,4} = -1 \pm 3i$.

Таким образом, нулями многочлена $f(z)$ являются $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2-i$, $z_3 = -1+3i$, $z_4 = -1-3i$.

Следовательно, многочлен $f(z)$ разлагается на неприводимые множители (квадратные трехчлены с отрицательными дискриминантами) следующим образом:

$$z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50 = \left(z^2 - 4z + 5\right)\left(z^2 + 2z + 10\right).$$

Задание 5

Даны многочлены $f(z) = z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15$ и $g(z) = z^2 - 2z - 1$.

Требуется:

а) подобрать целые нули многочлена $f(z)$ среди делителей свободного члена;

б) разложить многочлен $f(z)$ на линейные и неприводимые квадратичные множители с действительными коэффициентами;

в) разложить многочлен $f(z)$ на линейные множители с комплексными коэффициентами;

г) представить дробь $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ в виде суммы простейших дробей с действительными коэффициентами.

Прежде чем решать задачу, изучите п. 4 Рабочей программы.

Решение

а) Целыми делителями числа 15 являются: ±1, ±3, ±5, ±15.

В результате проверки убеждаемся, что $z_1=-1$ является нулём многочлена $f(z)$, так как $f(-1)=0$.

Следовательно, многочлен $f(z)$ делится на $(z-z_1)=z+1$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
z^4-6z^3+10z^2+2z-15 & z+1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{z^4+z^3\qquad\qquad\qquad} & z^3-7z^2+17z-15 \\
-7z^3+10z^2\qquad\quad & \\
-\ \underline{-7z^3-7z^2\qquad\quad} & \\
17z^2+2z\quad\ & \\
-\ \underline{17z^2+17z\quad\ } & \\
-15z-15 & \\
-\ \underline{-15z-15} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, $f(z)=(z+1)\left(z^3-7z^2+17z-15\right)$.

Целыми делителями свободного члена многочлена $z^3-7z^2+17z-15$ являются: ±1; ±3; ±5; ±15.

В результате проверки убеждаемся, что $z_2=3$ является нулём многочлена $z^3-7z^2+17z-15$ и, следовательно, многочлена $f(z)$. Значит, многочлен $f(z)$ делится на

$(z-z_1)(z-z_2)=(z+1)(z-3)=z^2-2z-3$.

Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
z^4-6z^3+10z^2+2z-15 & z^2-2z-3 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{z^4-2z^3-3z^2\qquad\qquad} & z^2-4z+5 \\
-4z^3+13z^2+2z-15 & \\
-\ \underline{-4z^3+8z^2+12z\qquad} & \\
5z^2-10z-15 & \\
-\ \underline{5z^2-10z-15} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, $f(z)=\left(z^2-2z-3\right)\left(z^2-4z+5\right)$.

Нулями второго множителя являются $z_{3,4}=2\pm\sqrt{4-5}=2\pm i$.

Итак, многочлен $f(z)$ имеет два целых нуля $z_1=-1$ и $z_2=3$.

б) Так как $z^2-2z-3=(z+1)(z-3)$, а многочлен z^2-4z+5 имеет лишь комплексные нули $z_3=2-i$ и $z_4=2+i$, то искомым разложением на множители с действительными коэффициентами будет $f(z)=(z+1)(z-3)\left(z^2-4z+5\right)$.

в) Многочлен $f(z)$ имеет четыре однократных (простых) нуля $z_1=-1$, $z_2=3$, $z_3=2-i$ и $z_4=2+i$. Так как старший коэффициент (коэффициент при старшей степени z) многочлена $f(z)$ равен 1, то $f(z)=(z+1)(z-3)(z-2+i)(z-2-i)$.

г) Дробь $\dfrac{g(z)}{f(z)}=\dfrac{z^2-2z-1}{z^4-6z^3+10z^2+2z-15}=\dfrac{z^2-2z-1}{(z+1)(z-3)\left(z^2-4z+5\right)}$

является правильной, и может быть представлена в виде суммы простейших дробей

$$\frac{z^2-2z-1}{(z+1)(z-3)\left(z^2-4z+5\right)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-3}+\frac{Cz+D}{z^2-4z+5}.$$

Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю, получим

$$\frac{z^2-2z-1}{(z+1)(z-3)\left(z^2-4z+5\right)}=$$

$$=\frac{A(z-3)\left(z^2-4z+5\right)+B(z+1)\left(z^2-4z+5\right)+(Cz+D)(z+1)(z-3)}{(z+1)(z-3)\left(z^2-4z+5\right)}.$$

Из равенства дробей и знаменателей этих дробей следует равенство и числителей, то есть

$$z^2-2z-1=A(z-3)\left(z^2-4z+5\right)+B(z+1)\left(z^2-4z+5\right)+$$
$$+(Cz+D)(z+1)(z-3).$$

Знаменатель дроби имеет два различных действительных корня и, следовательно, два неопределенных коэффициента могут быть легко найдены из последнего равенства.

Полагая $z=-1$, получим $2=A\cdot(-4)(10)$. Следовательно, $A=-\frac{1}{20}$.

Полагая $z=3$, получим $2=B\cdot 4\cdot 2$. Следовательно, $B=\frac{1}{4}$.

Два оставшихся неопределенных коэффициента можно найти из системы уравнений, полученной после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z:

$\begin{cases} z^3, & 0=A+B+C, \\ z^0, & -1=-15A+5B-3D. \end{cases}$ Подставив в систему известные значения

$A=-\frac{1}{20}$ и $B=\frac{1}{4}$, получим $\begin{cases} -\frac{1}{5}=C \\ -3=-3D \end{cases}$ или $\begin{cases} C=-\frac{1}{5} \\ D=1 \end{cases}.$

Таким образом,

$$\frac{z^2-2z-1}{(z+1)(z-3)\left(z^2-4z+5\right)}=-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-3}+\frac{-\frac{1}{5}z+1}{z^2-4z+5}.$$

Контрольная работа 2

Задание 1

Найти $\frac{1}{3}A^2-2BC$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1&3&4\\2&0&1\\5&6&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&4&-2&3\\-5&1&6&-1\\0&-3&7&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-3&1\\2&-1&5\\4&6&0\\-2&1&8\end{pmatrix}.$$

Прежде чем решать задачу, изучите п.п. 6, 8 Рабочей программы.

Решение.

По определению произведение матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)_{p\times q}$ возможно, если число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя), то есть если $n=p$. В результате, если произведение матриц возможно, получается матрица $C=AB=\left(c_{ij}\right)_{m\times q}$, у которой строк столько, сколько строк у матрицы первого сомножителя, а столбцов столько, сколько столбцов у матрицы второго сомножителя. Элементы матрицы C находятся по формуле $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n=p}a_{ik}\cdot b_{kj}$.

Практически при нахождении элемента c_{ij} матрицы C выбирают i-ую строку матрицы A, j-ый столбец матрицы B и «как бы скалярно перемножают».

Для решаемой задачи

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&3&4\\2&0&1\\5&6&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&4\\2&0&1\\5&6&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+3\cdot 2+4\cdot 5 & (-1)\cdot 3+3\cdot 0+4\cdot 6 & (-1)\cdot 4+3\cdot 1+4\cdot(-2)\\ 2\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 5 & 2\cdot 3+0\cdot 0+1\cdot 6 & 2\cdot 4+0\cdot 1+1\cdot(-2)\\ 5\cdot(-1)+6\cdot 2+(-2)\cdot 5 & 5\cdot 3+6\cdot 0+(-2)\cdot 6 & 5\cdot 4+6\cdot 1+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}27&21&-9\\3&12&6\\-3&3&30\end{pmatrix},$$

$$BC=\begin{pmatrix}2&4&-2&3\\-5&1&6&-1\\0&-3&7&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&1\\2&-1&5\\4&6&0\\-2&1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-19&46\\13&49&-8\\20&46&-7\end{pmatrix}.$$

По определению умножать матрицу можно на любое число, при этом получается матрица той же размерности, элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на это число.

По определению складывать можно матрицы только одинаковой размерности, при этом получится матрица той же размерности, что и размерность матриц слагаемых. Элементы этой матрицы равны сумме соответствующих элементов матриц слагаемых.

Следовательно,

$$\frac{1}{3}A^2-2BC=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}27&21&-9\\3&12&6\\-3&3&30\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0&-19&46\\13&49&-8\\20&46&-7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9&7&-3\\1&4&2\\-1&1&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&38&-92\\-26&-98&16\\-40&-92&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&45&-95\\-25&-94&18\\-41&-91&24\end{pmatrix}.$$

Задание 2

Решить матричные уравнения: а) $A\cdot X=B$; б) $X\cdot A=B$; в) $A\cdot X\cdot C=B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&6\\5&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&10\\8&6\end{pmatrix}.$$

Прежде чем решать задачу, изучите п. 8 Рабочей программы.

Решение

По определению $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E - единичная матрица, которая играет в матричной алгебре роль, аналогичную роли единицы в алгебре чисел.

Для квадратной невырожденной $(\det A\neq 0)$ матрицы A размерности 2×2 обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix},$$ где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы A.

а) Умножив обе части матричного уравнения $A\cdot X=B$ на матрицу A^{-1} слева, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ или, так как $A^{-1}\cdot A=E$, $X=A^{-1}\cdot B$.

Найдем A^{-1}. Для этого вычислим $\det A$ и алгебраические дополнения:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&4\\3&2\end{vmatrix}=1\cdot2-3\cdot4=-10,\ A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot2=2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot4=-4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot3=-3,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot1=1.$$

Запишем $A^{-1}=-\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\-3&1\end{pmatrix}$.

Найдем матрицу

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&6\\5&4\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-14&-4\\-4&-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}4&0{,}4\\0{,}4&1{,}4\end{pmatrix}.$$

б) Умножив обе части матричного уравнения $X\cdot A=B$ на матрицу A^{-1} справа, получим $X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$ или $X=B\cdot A^{-1}$.

Найдем матрицу

$$X=B\cdot A^{-1}=-\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}3&6\\5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-4\\-3&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-12&-6\\-2&-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}2&0{,}6\\0{,}2&1{,}6\end{pmatrix}.$$

в) Умножив обе части матричного уравнения $A\cdot X\cdot C=B$ на матрицу A^{-1} слева, получим $X\cdot C=A^{-1}\cdot B$; умножив обе части последнего уравнения на C^{-1} справа, получим $X=A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$.

Найдя матрицу $C^{-1}=-\frac{1}{56}\cdot\begin{pmatrix}6&-10\\-8&4\end{pmatrix}$ и перемножив матрицы $A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}$, найдем матрицу X:

$$X=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-14&-4\\-4&-14\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{56}\right)\cdot\begin{pmatrix}6&-10\\-8&4\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{560}\cdot\begin{pmatrix}14&4\\4&14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&-10\\-8&4\end{pmatrix}=-\frac{1}{560}\cdot\begin{pmatrix}52&-124\\-88&16\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{4}{560} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 31 \\ 22 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{140} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 31 \\ 22 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{140} & \frac{31}{140} \\ \frac{22}{140} & -\frac{4}{140} \end{pmatrix}.$$

Задание 3

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$:

а) по правилу Крамера;
б) методом Гаусса;
в) матричным методом.

Прежде чем решать задачу, изучите п.п. 7, 8 Рабочей программы.

Решение

а) По правилу Крамера $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$,

где $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ - определитель системы, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ - вспомогательные определители.

Вычислив определители, получим
$\Delta = 58$, $\Delta_1 = 58$, $\Delta_2 = 116$, $\Delta_3 = -58$.

Следовательно, $x_1 = \frac{58}{58} = 1$, $x_2 = \frac{116}{58} = 2$, $x_3 = \frac{-58}{58} = -1$.

б) Запишем расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования (алгоритм метода Гаусса), приведём её к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -9 & 1 \\ 0 & -10 & -8 & -12 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 29 & -29 \end{array}\right).$$

Преобразованной матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 - 5x_3 = 7 \\ 29x_3 = -29 \end{cases}$.

Из третьего уравнения системы $x_3 = -\frac{29}{29} = -1$.

Из второго уравнения системы $x_2 = 7 + 5x_3 = 7 + 5 \cdot (-1) = 2$.

Из первого уравнения системы
$x_1 = 4 - 3x_3 - 3x_2 = 4 - 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 1$.

Таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

в) Матрица решений $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ равна $X = A^{-1} \cdot B$, где

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$-матрица системы, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$-матрица свободных членов системы.

Найдём A^{-1}. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $\det A = \Delta = 58$

(вычислен ранее), A_{ij}-алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы A равны:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{31} = 15$,

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=11,\qquad A_{32}=-9,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-10,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=8,\qquad A_{33}=4.$$

Таким образом, $A^{-1}=\dfrac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix}6 & 1 & 15\\ 8 & 11 & -9\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}$ и

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix}6 & 1 & 15\\ 8 & 11 & -9\\ -10 & 8 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix}54+43+0\\ 72+44+0\\ -90+32+0\end{pmatrix}=\frac{1}{58}\cdot\begin{pmatrix}58\\ 116\\ -58\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1$.

Задание 4

Решить системы уравнений:

$$a)\ \begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4+4x_5=1,\\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=-2,\\ 2x_1\qquad\ +3x_3-x_4+x_5=6;\end{cases}$$

$$б)\ \begin{cases}-3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3,\\ x_1+2x_2-2x_3+5x_4+3x_5=-1,\\ -x_1+8x_2-3x_3+12x_4+6x_5=2.\end{cases}$$

Прежде чем решать задачу, изучите п.п.7, 8, 9 Рабочей программы.

Решение

Так как в заданных системах уравнений число неизвестных не равно числу уравнений, то для решения можем применить только метод Гаусса.

а) Запишем расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования (алгоритм метода Гаусса), приведём её к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2 & 0 & -2\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 10 & -10 & 5 & -12 & -5\\ 0 & 4 & -3 & 1 & -7 & 4\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 10 & -10 & 5 & -12 & -5\\ 0 & 0 & 5 & -5 & -11 & 30\end{array}\right).$$

Преобразованной матрице соответствует система

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-x_4+4x_5=1,\\ \quad 10x_2-10x_3+5x_4-12x_5=-5,\\ \qquad\quad 5x_3-5x_4-11x_5=30.\end{cases}$$

Получили систему трех линейно независимых уравнений с пятью неизвестными. Следовательно, две неизвестные можно считать свободными и через них выражать оставшиеся неизвестные. Выберем в качестве свободных неизвестных неизвестные x_4 и x_5.

Перенеся слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть системы, получим систему

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=1+x_4-4x_5,\\ \quad 10x_2-10x_3=-5-5x_4+12x_5,\\ \qquad\quad 5x_3=30+5x_4+11x_5.\end{cases}$$

Положив $x_4=t_1,\ x_5=t_2$ и решив систему, найдем

$$x_1=-6-t_1-\frac{19}{5}t_2,\ x_2=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}t_1+\frac{17}{5}t_2,\ x_3=6+t_1+\frac{11}{5}t_2,\ x_4=t_1,\ x_5=t_2,$$

где t_1 и t_2 - произвольные числа

б) Запишем расширенную матрицу системы и, используя элементарные преобразования (алгоритм метода Гаусса), приведём её к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}-3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1\\ -1 & 8 & -3 & 12 & 6 & 2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1\\ -3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & 8 & -3 & 12 & 6 & 2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&-2&5&3&-1\\0&10&-5&17&9&0\\0&10&-5&17&9&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&-2&5&3&-1\\0&10&-5&17&9&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right).$$

Преобразованной матрице соответствует система, у которой третье уравнение $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5=1$ не имеет решений. Следовательно, система несовместна.

Задание 5

Даны вершины пирамиды
$A(4;2;5)$, $B(0;3;7)$, $C(3;5;2)$, $D(1;3;6)$ и точка $P(1;2;2)$.

Найти:

а) длину ребра AB;

б) косинус угла между рёбрами AB и CD;

в) площадь грани ABC;

г) объём пирамиды;

д) уравнение прямой, на которой лежит ребро AB;

е) уравнение прямой, на которой лежит высота h_A пирамиды, опущенная из вершины A;

Выяснить, лежат ли точки $D(1;3;6)$ и $P(1;2;2)$ по одну сторону плоскости грани ABC или по разные?

Прежде чем решать задачу, изучите п.п. 10, 11, 12 Рабочей программы.

Решение

а) Длину AB найдём по формуле расстояния между двумя точками

$$|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(2-3)^2+(5-7)^2}=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21}.$$

б) Угол φ между рёбрами AB и CD будет равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Введём в рассмотрение векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и найдём их координаты:

$\overrightarrow{AB}=(0-4;\ 3-2;\ 7-5)=(-4;\ 1;\ 2)$,

$\overrightarrow{CD}=(1-3;\ 3-5;\ 6-2)=(-2;\ -2;\ 4)$.

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{(-4)(-2)+1\cdot(-2)+2\cdot4}{\sqrt{(-4)^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{8-2+8}{\sqrt{16+1+4}\cdot\sqrt{4+4+16}}=$$

$$=\frac{14}{\sqrt{21}\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{14}}{6}.$$

в) Площадь грани ABC (площадь треугольника ABC) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Введём в рассмотрение векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и найдём их координаты:

$\overrightarrow{AB}=(0-4;3-2;7-5)=(-4;1;2)$,

$\overrightarrow{AC}=(3-4;5-2;2-5)=(-1;3;-3)$.

Найдём

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\-4&1&2\\-1&3&-3\end{vmatrix}=\vec i(-3-6)-\vec j(12+2)+\vec k(-12+1)=-9\vec i-14\vec j-11\vec k.$$

Далее

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-9)^2+(-14)^2+(-11)^2}=\sqrt{81+196+121}=\sqrt{398}$$ и

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{398}.$$

г) Объём пирамиды $V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|$.

$\overrightarrow{AB}=(-4;1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;3;-3)$, $\overrightarrow{AD}=(-3;1;1)$.

Найдём

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$$

$$\begin{vmatrix}-4&1&2\\-1&3&-3\\-3&1&1\end{vmatrix}=-4\cdot3\cdot1+1\cdot(-3)\cdot(-3)+1\cdot(-1)\cdot2-(-3)\cdot3\cdot2-$$

$$-1\cdot(-3)\cdot(-4)-(-1)\cdot1\cdot1=-12+9-2+18-12+1=2.$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot2=\frac{1}{3}.$$

д) Прямая, на которой лежит ребро AB, проходит через точки $A(4;2;5)$ и $B(0;3;7)$. Запишем уравнение этой прямой, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Для решаемой задачи $\frac{x-4}{0-4}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-5}{7-5}$ или $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{2}$.

е) Прямая, на которой лежит высота пирамиды h_A, проходит через точку $A(4;\ 2;\ 5)$ перпендикулярно плоскости BCD. Следовательно, нормальный вектор плоскости BCD будет являться направляющим вектором для прямой.

Уравнение плоскости BCD найдём, используя уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Для решаемой задачи это точки $B(0;3;7)$, $C(3;5;2)$, $D(1;3;6)$ и, следовательно, уравнение ABC $\begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-7 \\ 3-0 & 5-3 & 2-7 \\ 1-0 & 3-3 & 6-7 \end{vmatrix}=0$,

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z-7 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$-2x-(y-3)\cdot 2+(z-7)\cdot(-2)=0$, $-2x-2y+6-2z+14=0$,

$x+y+z+10=0$.

Вектор $\vec{n}=(1;1;1)$ является нормальным вектором плоскости BCD, следовательно, этот вектор является направляющим вектором для прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости BCD. Уравнение этой прямой $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{1}$.

Выясним, лежат ли точки $D(1;3;6)$ и $P(1;2;2)$ по одну сторону плоскости грани ABC или по разные?

Найдём уравнение плоскости грани ABC как уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(A,\ B,\ C)$:

$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$.

Для решаемой задачи $A(4;\ 2;\ 5)$, а $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-9\vec{i}-14\vec{j}-11\vec{k}$ найден в п. в) решаемой задачи. Следовательно, уравнение плоскости грани ABC: $-9(x-4)-14(y-2)-11(z-5)=0$ или $9x+14y+11z-119=0$.

Для всех точек $(x,\ y,\ z)$, лежащих на плоскости, будет выполняться равенство $9x+14y+11z-119=0$, для точек, лежащих по одну сторону плоскости, будет выполняться неравенство $9x+14y+11z-119>0$, для точек, лежащих по другую сторону плоскости, - неравенство $9x+14y+111z-119<0$.

Для точки $D(1;3;6)$ выполняется неравенство $9\cdot1+14\cdot3+11\cdot6-119<0$.

Для точки $P(1;2;2)$ выполняется неравенство $9\cdot1+14\cdot2+11\cdot2-119<0$.

Следовательно, точки $D(1;3;6)$ и $P(1;2;2)$ лежат по одну сторону плоскости грани ABC.

Задание 6

Дано уравнение кривой в полярной системе координат $\rho=\frac{3}{2-\cos\varphi}$.

Требуется:

а) построить кривую по точкам, придавая φ значения из промежутка $[0;\ 2\pi)$ с шагом $\pi/8$;

б) записать уравнение этой кривой в декартовой прямоугольной системе координат, согласованной с полярной, и определить тип этой кривой.

Прежде чем решать задачу, изучите п. 13 Рабочей программы.

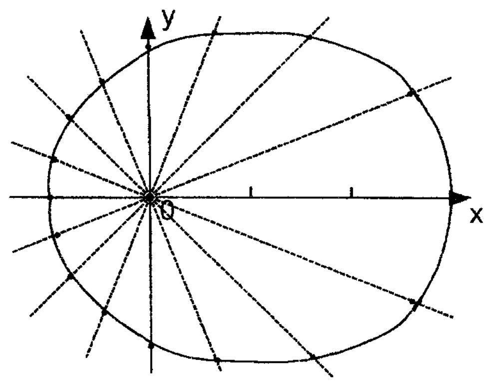
Решение

а) Составим таблицу значений функции.

φ	0	π/8	π/4	3π/8	π/2	5π/8	3π/4	7π/8
ρ	3	2,8	2,32	1,72	1,5	1,26	1,11	1,02

φ	π	9π/8	5π/8	11π/8	3π/2	13π/8	7π/4	15π/8
ρ	1	1,02	1,11	1,26	1,5	1,72	2,32	2,8

По этим данным отметим точки на плоскости и, плавно соединяя соседние точки, построим линию.



б) Перейдём к декартовой прямоугольной системе координат, пользуясь формулами $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{\rho}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Заданное уравнение примет вид $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{3}{2-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$.

Преобразуем это уравнение: $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{3\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}-x}$,

$2\sqrt{x^2+y^2}-x=3$, $2\sqrt{x^2+y^2}=x+3$, $4\left(x^2+y^2\right)=x^2+6x+9$,

$3x^2-6x+4y^2=9$.

Выделив полные квадраты переменных x и y, получим $3(x-1)^2+4y^2=12$ или $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

Это уравнение эллипса с центром в точке $(1;0)$ и полуосями $a=2$ и $b=\sqrt{3}$.

Контрольная работа 3

Задание 1

Образует ли линейное подпространство пространства R^4 множество V, заданное по правилу:

а) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-2x_3=0\}$;

б) $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_3+x_4=3\}$?

Прежде чем решать задачу, изучите п. 15 Рабочей программы.

Решение

R^4-это векторное пространство. Следовательно, для любых элементов (векторов) этого пространства $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$, ...

и произвольного числа λ, введены операции сложения и умножения на число: $x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)\in R^4$, $\lambda x=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \lambda x_4)\in R^4$ и эти операции обладают следующими свойствами:

1. $x+y=y+x$,
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$,
3. $x+o=x$,
4. $x+(-x)=o$,
5. $1\cdot x=x$,
6. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,
7. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$,
8. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Для элементов множества V операции сложения и умножения на число такие же, что и в R^4.

а) Если $x_1-2x_3=0$ или $x_1=2x_3$, то $V=\{(2x_3,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\}$.

Возьмем произвольные элементы множества V
$x=(2x_3,x_2,x_3,x_4)$, $y=(2y_3,y_2,y_3,y_4)$.

Тогда
$x+y=(2(x_3+y_3),\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)\in R^4$,
$\lambda x=(2\lambda x_3,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \lambda x_4)\in R^4$.

Выполнение свойств 1 – 8 очевидно, так как векторы $x+y$ и $\lambda x\in R^4$.

Следовательно, множество V является линейным подпространством пространства R^4.

б) Если $x_3+x_4=3$ или $x_3=3-x_4$, то $V=\{(x_1,\ x_2,\ 3\text{-}x_4,\ x_4)\}$.

Возьмем произвольные элементы множества V
$x=(x_1,x_2,3-x_4,x_4)$, $y=(y_1,y_2,3-y_4,y_4)$.

Тогда $x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ 6-x_4-y_4,\ x_4+y_4)\notin V$, так как для третьей координаты элемента $x+y$ не выполняется заданное для множества V правило $x_3=3-x_4$: $(6-x_4-y_4)\neq 3-(x_4+y_4)$, то есть $6\neq 3$.

Следовательно, множество V не является линейным подпространством пространства R^4.

<u>Задание 2</u>

В стандартном базисе пространства R^4 даны векторы $e_1=(1;0;1;-1)$, $e_2=(1;0;0;1)$, $e_3=(0;0;2;-1)$, $e_4=(1;4;2;0)$ и $a=(1;2;1;3)$.

Требуется:

а) убедиться, что векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства R^4;

б) найти разложение вектора a по этому базису;

в) найти угол между векторами e_1 и e_2.

Прежде чем решать задачу, изучите п. 15 Рабочей программы.

<u>Решение</u>

а) Векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства R^4, если

их линейная комбинация $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4$ равна нулю, только при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.

Уравнению $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4=0$ соответствует система уравнений $\begin{cases}\alpha_1+\ \alpha_2+\ \alpha_4=0,\\ 4\alpha_4=0,\\ \alpha_1+2\alpha_3+2\alpha_4=0,\\ -\alpha_1+\ \alpha_2-\alpha_3=0.\end{cases}$ Эта однородная система имеет только нулевое (тривиальное) решение $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, если её определитель не равен нулю, то есть $\begin{vmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&4\\1&0&2&2\\-1&1&-1&0\end{vmatrix}\neq 0.$

Вычислим определитель, разложив его по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&4\\1&0&2&2\\-1&1&-1&0\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&2\\-1&1&-1\end{vmatrix}=4\cdot(0-2+0-0-2+1)=-12\neq 0.$$

Следовательно, заданные векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства R^4.

б) Найдем координаты вектора $a=(a_1;a_2;a_3;a_4)$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 из векторного уравнения $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4=a$.

Этому векторному уравнению соответствует система

$$\begin{cases}\alpha_1\cdot 1+\ \alpha_2\cdot 1+\ \alpha_3\cdot 0\ +\ \alpha_4\cdot 1\ =1,\\ \alpha_1\cdot 0\ +\alpha_2\cdot 0\ +\ \alpha_3\cdot 0\ +\alpha_4\cdot 4\ =2,\\ \alpha_1\cdot 1+\ \alpha_2\cdot 0\ +\ \alpha_3\cdot 2\ +\alpha_4\cdot 2\ =1,\\ \alpha_1\cdot(-1)+\alpha_2\cdot 1+\alpha_3\cdot(-1)+\alpha_4\cdot 0=3.\end{cases}$$

Решив систему, находим $\alpha_1=-\dfrac{5}{3}$, $\alpha_2=\dfrac{13}{6}$, $\alpha_3=\dfrac{5}{6}$, $\alpha_4=\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, разложение вектора a по базису e_1, e_2, e_3, e_4:

$a=-\frac{5}{3}e_1+\frac{13}{6}e_2+\frac{5}{6}e_3+\frac{1}{2}e_4$.

в) Если скалярное произведение в R^4 определено аналогично тому, как это было в R^3, то

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}{|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|}=\frac{1\cdot1+0\cdot0+1\cdot0+(-1)\cdot1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2+1^2}}=\frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0.$$

Следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то есть векторы e_1 и e_2 ортогональны.

Задание 3

Установить, являются ли заданные отображения $A: R^4\to R^4$ линейными. В случае линейности отображения записать матрицу оператора A в каноническом базисе $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$.

а) $Ax=(x_2-3x_4;-x_1;x_2+x_3;x_1+3x_2)$;

б) $Ax=(3x_1+x_2;x_2-x_3;x_1x_4;x_3-2x_4)$.

Прежде чем решать задачу, изучите п. 16 Рабочей программы.

Решение

Отображение $A: V\to V$ линейного пространства называется линейным, если оно для любых $x, y\in V$ удовлетворяет условиям $A(x+y)=Ax+Ay$ и $A(\lambda x)=\lambda Ax$.

По условию, пространство R^4 отображается в пространство R^4, следовательно, для любых элементов (векторов) этого пространства $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ и произвольного числа λ, введены операции сложения и умножения на число: $x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)\in R^4$,

$\lambda x=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \lambda x_4)\in R^4$.

а) Если $Ax=(x_2-3x_4;-x_1;x_2+x_3;x_1+3x_2)$, то:

$Ax=A(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_2-3x_4;-x_1;x_2+x_3;x_1+3x_2)$,

$Ay=A(y_1;y_2;y_3;y_4)=(y_2-3y_4;-y_1;y_2+y_3;y_1+3y_2)$.

Проверим выполнение условий линейности отображения

$A(x+y)=A(x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ x_3+y_3;\ x_4+y_4)=$

$((x_2+y_2)-3(x_4+y_4);\ -(x_1+y_1);\ (x_2+y_2)+(x_3+y_3);\ (x_1+y_1)+3(x_2+y_2))=$

$(x_2-3x_4+y_2-3y_4;-x_1-y_1;x_2+x_3+y_2+y_3;x_1+3x_2+y_1+3y_2)$.

$Ax+Ay=(x_2-3x_4;-x_1;x_2+x_3;x_1+3x_2)+(y_2-3y_4;-y_1;y_2+y_3;y_1+3y_2)=$

$=(x_2-3x_4+y_2-3y_4;-x_1-y_1;x_2+x_3+y_2+y_3;x_1+3x_2+y_1+3y_2)$.

Координаты векторов $A(x+y)$ и $Ax+Ay$ равны, следовательно, $A(x+y)=Ax+Ay$, то есть первое условие линейности отображения выполняется.

$A(\lambda x)=A(\lambda x_1;\lambda x_2;\lambda x_3;\lambda x_4)=(\lambda x_2-3\lambda x_4;-\lambda x_1;\lambda x_2+\lambda x_3;\lambda x_1+3\lambda x_2)$

$=\lambda(x_2-3x_4;-x_1;x_2+x_3;x_1+3x_2)=\lambda Ax$, следовательно, второе условие линейности отображения тоже выполняется.

Таким образом, отображение $Ax=(x_2-3x_4;-x_1;x_2+x_3;x_1+3x_2)$ является линейным оператором.

Найдем матрицу этого оператора в каноническом базисе $e_1=(1;0;0;0)$, $e_2=(0;1;0;0)$, $e_3=(0;0;1;0)$, $e_4=(0;0;0;1)$.

В силу линейности оператора для произвольного $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$Ax=A(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)=A(x_1e_1)+A(x_2e_2)+A(x_3e_3)+A(x_4e_4)=$

$=x_1A(e_1)+x_2A(e_2)+x_3A(e_3)+x_4A(e_4)=$

$=x_1A(1;0;0;0)+x_2A(0;1;0;0)+x_3A(0;0;1;0)+x_4A(0;0;1;0)$.

Для заданного преобразования (оператора)

$Ae_1=(0;-1;0;1)$, $Ae_2=(1;0;1;3)$, $Ae_3=(0;0;1;0)$,

$Ae_4=(-3;0;0;0)$.

Преобразованный вектор Ax имеет в стандартном базисе координаты

$Ax=x_1\cdot(0;-1;0;1)+x_2\cdot(1;0;1;3)+x_3\cdot(0;0;1;0)+x_4\cdot(-3;0;0;0)=$

$=(x_2-3x_4;\ -x_1;\ x_2+x_3;\ x_1+3x_2)$.

Такому оператору соответствует матрица $A=\begin{pmatrix}0&1&0&-3\\-1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&3&0&0\end{pmatrix}$,

так как $\begin{pmatrix}0&1&0&-3\\-1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&3&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-3x_4\\-x_1\\x_2+x_3\\x_1+3x_2\end{pmatrix}$.

б) Проверим выполнение условий линейности отображения $Ax=(3x_1+x_2;x_2-x_3;x_1x_4;x_3-2x_4)$.

$Ax=A(x_1;x_2;x_3;x_4)=(3x_1+x_2;\ x_2-x_3;\ x_1\cdot x_4;\ x_3-2x_4)$,

$Ay=A(y_1;y_2;y_3;y_4)=(3y_1+y_2;\ y_2-y_3;\ y_1\cdot y_4;\ y_3-2y_4)$,

$A(x+y)=A(x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ x_3+y_3;\ x_4+y_4)=$

$=(3(x_1+y_1)+(x_2+y_2);\ x_2+y_2-(x_3+y_3);\ (x_1+y_1)\cdot(x_4+y_4);\ x_3+y_3-2(x_4+y_4))=$

$=(3x_1+3y_1+x_2+y_2;x_2+y_2-x_3-y_3;x_1x_4+y_1x_4+x_1y_4+y_1y_4;x_3+y_3-2x_4-2y_4)$.

$Ax+Ay=(3x_1+x_2;\ x_2-x_3;\ x_1\cdot x_4;\ x_3-2x_4)+(3y_1+y_2;\ y_2-y_3;\ y_1\cdot y_4;\ y_3-2y_4)=$

$=(3x_1+3y_1+x_2+y_2;\ x_2+y_2-x_3-y_3;\ x_1x_4+y_1y_4;\ x_3+y_3-2x_4-2y_4)$.

Третьи координаты векторов $A(x+y)$ и $Ax+Ay$ не равны $x_1x_4+y_1x_4+x_1y_4+y_1y_4\neq x_1x_4+y_1y_4$, следовательно,

$A(x+y)\neq Ax+Ay$, то есть рассмотренное отображение не является линейным.

Задание 4

Линейный оператор $A:R^3\to R^3$ в базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$ представлен матрицей $A=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&3&-4\\-1&2&1\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного

оператора в базисе $f_1,\ f_2,\ f_3$, если $\begin{cases}f_1=e_1-e_2+3e_3,\\f_2=4e_1+e_2-e_3,\\f_3=2e_1-3e_2.\end{cases}$

Решение

Прежде чем решать задачу, изучите п. 16 Рабочей программы.

При переходе от «старого» базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к «новому» базису $f_1,\ f_2,\ f_3$ изменяются координаты векторов пространства и, следовательно, изменяется матрица линейного оператора. При этом, матрица A оператора в «старом» базисе и матрица A' того же оператора в «новом» базисе связаны соотношением $A'=F^{-1}\cdot A\cdot F$, где F-матрица перехода от «старого» базиса к «новому», то есть квадратная матрица, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов в «старом» базисе.

Составим матрицу перехода $F=\begin{pmatrix}1&4&2\\-1&1&-3\\3&-1&0\end{pmatrix}$ и вычислим

$A'=F^{-1}\cdot A\cdot F$.

Для этого найдем матрицу F^{-1}: $F^{-1}=\dfrac{1}{\det F}\begin{vmatrix}F_{11}&F_{21}&F_{31}\\F_{12}&F_{22}&F_{32}\\F_{13}&F_{23}&F_{33}\end{vmatrix}$,

$\det F=\begin{vmatrix}1&4&2\\-1&1&-3\\3&-1&0\end{vmatrix}=-43$,

$F_{11}=\begin{vmatrix}1&-3\\-1&0\end{vmatrix}=-3$, $F_{21}=-\begin{vmatrix}4&2\\-1&0\end{vmatrix}=-2$, $F_{31}=\begin{vmatrix}4&2\\1&-3\end{vmatrix}=-14$,

$F_{12}=-\begin{vmatrix}-1&-3\\3&0\end{vmatrix}=-9$, $F_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=-6$, $F_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-3\end{vmatrix}=1$,

$F_{13}=\begin{vmatrix}-1&1\\3&-1\end{vmatrix}=-2$, $F_{23}=-\begin{vmatrix}1&4\\3&-1\end{vmatrix}=13$, $F_{33}=\begin{vmatrix}1&4\\-1&1\end{vmatrix}=5$,

$$F^{-1}=-\frac{1}{43}\begin{pmatrix}-3&-2&-14\\-9&-6&1\\-2&13&5\end{pmatrix}$$ и вычислим $A'=F^{-1}\cdot A\cdot F$.

$$A'=F^{-1}AF=-\frac{1}{43}\begin{pmatrix}-3&-2&-14\\-9&-6&1\\-2&13&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&3&-4\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&2\\-1&1&-3\\3&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{43}\begin{pmatrix}18&-37&-3\\11&-25&34\\12&47&-45\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&2\\-1&1&-3\\3&-1&0\end{pmatrix}=-\frac{1}{43}\begin{pmatrix}46&38&147\\138&-15&97\\-170&140&-117\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{46}{43}&-\frac{38}{43}&-\frac{147}{43}\\-\frac{138}{43}&\frac{15}{43}&-\frac{97}{43}\\\frac{170}{43}&-\frac{140}{43}&\frac{117}{43}\end{pmatrix}.$$

Задание 5

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в базисе e_1, e_2, e_3 матрицей

$$A=\begin{pmatrix}10&4&4\\-1&1&0\\-13&-6&-5\end{pmatrix}.$$

Прежде чем решать задачу, изучите п. 16 Рабочей программы.

Решение

Ненулевой вектор x называется собственным вектором, а число λ-соответствующим вектору x собственным значением оператора A, если $Ax=\lambda x$ или $(A-\lambda E)x=0$.

Для заданной матрицы A последнее матричное уравнение

примет вид $$\left(\begin{pmatrix}10&4&4\\-1&1&0\\-13&-6&-5\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ или

$$\begin{pmatrix}10-\lambda&4&4\\-1&1-\lambda&0\\-13&-6&-5-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Этому матричному уравнению соответствует однородная линейная система уравнений

$$\begin{cases}(10-\lambda)x_1+4x_2+4x_3=0,\\-x_1+(1-\lambda)x_2=0,\\-13x_1-6x_2+(-5-\lambda)x_3=0.\end{cases}$$

Для того, чтобы однородная система имела ненулевые решения необходимо, чтобы её определитель $\begin{vmatrix}10-\lambda&4&4\\-1&1-\lambda&0\\-13&-6&-5-\lambda\end{vmatrix}$ был равен нулю.

Уравнение $\begin{vmatrix}10-\lambda&4&4\\-1&1-\lambda&0\\-13&-6&-5-\lambda\end{vmatrix}=0$ называют характеристическим уравнением.

Для нахождения собственных значений λ решим характеристическое уравнение:

$(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda-50)+24+52(1-\lambda)-4(5+\lambda)=0$,

$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$,

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$.

Таким образом, собственными значениями линейного оператора, заданного матрицей A (собственными значениями матрицы A), являются $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$.

Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям, то есть векторы $x_i=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ $(i=1,2,3)$.

Для $\lambda_1 = 1$ получим систему уравнений для нахождения координат первого собственного вектора

$$\begin{cases} (10-1)\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + (1-1)\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 + (-5-1)\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 9\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 - 6\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = 0, \\ \xi_2 + \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\xi_3 = t$, получим координаты первого собственного вектора $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. При $t = 1$, получим $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 2$ получим систему уравнений для нахождения координат второго собственного вектора

$$\begin{cases} (10-2)\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + (1-2)\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 + (-5-2)\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 8\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 - 7\xi_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ 13\xi_1 + 6\xi_2 + 7\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -7\xi_2 + 7\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\xi_2 = t$, получим координаты второго собственного вектора $x_2 = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. При $t = 1$, получим $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_3 = 3$ получим систему уравнений для нахождения координат третьего собственного вектора

$$\begin{cases} (10-3)\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + (1-3)\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 + (-5-3)\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 7\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - 2\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 - 8\xi_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 7\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ 13\xi_1 + 6\xi_2 + 8\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ -10\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -20\xi_2 + 8\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 5\xi_2 - 2\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\xi_2 = t$, получим координаты третьего собственного

вектора $x_3 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ \frac{5}{2}t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. При $t = 2$, получим $x_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Задание 6

Линейным преобразованием координат привести уравнение кривой второго порядка $-3x^2 + 8xy + 3y^2 + 2x - 15 = 0$ к каноническому виду и определить тип кривой.

Прежде чем решать задачу, изучите п.п.13, 14, 16 Рабочей программы.

Решение

Слагаемые второй степени уравнения образуют квадратичную форму $-3x^2 + 8xy + 3y^2$, матрица которой имеет вид $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

В базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы примет диагональный вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, а квадратичная форма не будет содержать произведения xy.

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение матрицы A: $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -5$ являются собственными значениями матрицы A.

Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям.

Для $\lambda_1 = 5$ получим систему уравнений для нахождения координат первого собственного вектора $\begin{cases}(-3-5)\xi_1+4\xi_2=0,\\ 4\xi_1+(3-5)\xi_2=0,\end{cases}$

$\begin{cases}-8\xi_1+4\xi_2=0,\\ 4\xi_1-2\xi_2=0,\end{cases}$ $2\xi_1-\xi_2=0$.

Полагая $\xi_1=t$, получим координаты первого собственного вектора $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}t\\2t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. При $t=1$, получим $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2=-5$ получим систему уравнений для нахождения координат второго собственного вектора $\begin{cases}(-3+5)\xi_1+4\xi_2=0,\\ 4\xi_1+(3+5)\xi_2=0,\end{cases}$

$\begin{cases}2\xi_1+4\xi_2=0,\\ 4\xi_1+8\xi_2=0,\end{cases}$ $\xi_1+2\xi_2=0$.

Полагая $\xi_2=t$, получим координаты второго собственного вектора $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-2t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. При $t=1$, получим $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Чтобы избежать искажения линейных размеров при переходе от «старого» базиса $\vec{i},\vec{j}$ к «новому» базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, выберем единичные собственные векторы $\vec{e}_1=\frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}$ и $\vec{e}_2=\frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|}$.

$\vec{x}_1=(1;\ 2)$, $|\vec{x}_1|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$; $\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1;\ 2)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$\vec{x}_2=(-2;\ 1)$, $|\vec{x}_2|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$; $\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2;\ 1)=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Базис $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ является не только нормированным, но и ортогональным, так как $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=0$. Следовательно, при переходе от «старого» базиса $\vec{i},\vec{j}$ к «новому» базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ не будет происходить искажения угловых размеров.

Запишем матрицу перехода $F=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ и уравнения, связывающие «старые» координаты x, y и «новые» координаты x', y' $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y',\\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'.\end{cases}$

В базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$:

квадратичная форма $-3x^2+8xy+3y^2$ примет вид $5x'^2-5y'^2$,

линейная форма $2x-15$ примет вид $2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)-15$,

уравнение кривой $-3x^2+8xy+3y^2+2x-15=0$ примет вид

$5x'^2-5y'^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)-15=0$ или

$5x'^2+\frac{2}{\sqrt{5}}x'-5y'^2-\frac{4}{\sqrt{5}}y'-15=0$.

Выделив полные квадраты переменных x' и y', получим

$5\left(x'^2+\frac{2}{5\sqrt{5}}x'+\frac{1}{125}\right)-5\left(y'^2+\frac{4}{5\sqrt{5}}y'+\frac{4}{125}\right)-\frac{372}{25}=0$ или

$5\left(x'+\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2-5\left(y'+\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^2=\frac{372}{25}$.

После параллельного переноса осей координат

$\begin{cases}x''=x'+\frac{1}{5\sqrt{5}}\\ y''=y'+\frac{2}{5\sqrt{5}}\end{cases}$ получим уравнение $5x''^2-5y''^2=\frac{372}{25}$,

$\frac{x''^2}{\frac{372}{125}}-\frac{y''^2}{\frac{372}{125}}=1$.

Получили уравнение гиперболы. Это уравнение получено с помощью линейных преобразований исходного уравнения, следовательно, исходное уравнение также является уравнением гиперболы.