

№

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Южный федеральный университет»

**Математическое моделирование
случайных процессов и оценивание
их статистических характеристик**

Учебное пособие

Для студентов радиотехнического факультета
всех форм обучения

Таганрог 2013

УДК 004.942+519.21

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор Донского государственного технического университета **Марчук В.И.**;

доктор технических наук, профессор кафедры САПР ЮФУ **Лебедев Б.К.**

Галустов Г.Г., Сидько И.В. «Математическое моделирование случайных процессов и оценивание их статистических характеристик». – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2013. – 45 с.

В данном пособии изложено краткое описание принципов построения математических моделей случайных процессов, наиболее часто встречающихся на практике.

Изложены методики оценки статистических характеристик моделей случайных процессов, автокорреляционных функций.

Пояснены принципы анализа гистограмм статистических распределений и описаны критерии согласия Колмогорова и Пирсона.

Пособие рассчитано на углубленное изучение принципов объектно-ориентированного программирования. Для всех примеров приводятся подробные листинги программ, разработанные в среде математического моделирования Matlab.

Пособие соответствует программам магистерской подготовки студентов всех форм обучения по направлению «Радиотехника».

Табл. 5. Ил. 19 . Библиогр.: 15. назв.

© ЮФУ, 2013

© Г.Г. Галустов, И.В. Сидько, 2013

Введение

С развитием современных компьютерных технологий и появлением целого ряда прикладных программных продуктов, предназначенных для моделирования и анализа различного рода процессов, появилась возможность моделирования ситуаций, либо процессов, отображающих реальные процессы, протекающие в природе (в реальных устройствах). При этом можно с заданной долей точности добиться решения поставленной задачи.

В вычислительной технике широкое применение получил метод статистических испытаний. В основу метода положено построение некоторого вероятностного процесса, параметры которого для каждой задачи представляют искомое решение этой задачи. Последующий статистический анализ этой модели позволяет определить указанные параметры и найти, таким образом, приближённое решение поставленной задачи.

Интерес к методу статистического моделирования обусловлен рядом существенных его достоинств, к которым следует отнести приспособленность метода к решению многомерных задач, высокую помехоустойчивость к случайным сбоям машины и потребность в относительно небольшом объёме памяти для промежуточных результатов.

Реализация метода статистического моделирования на ЭВМ базируется на использовании в процессе моделирования различных потоков случайных чисел с заданными статистическими характеристиками. Последние получают, как правило, путём цифрового преобразования исходных равномерно распределённых потоков случайных чисел в заданные числа. Исходные равномерно распределённые потоки чисел получают либо на ЭВМ, в результате реализации специальных программ, либо применением аппаратных генераторов случайных чисел, использующих в основе физические источники шумов.

Использование “псевдослучайных” или случайных последовательностей чисел зависит от решаемой задачи. При этом следует отметить, что при использовании “псевдослучайных” чисел никаких дополнительных трудностей не возникает, если речь идёт об исследовании линейных систем с постоянными параметрами. Однако на результаты статистического исследования нелинейных систем могут оказывать заметное влияние распределения второго и более высоких порядков, используемого псевдослучайного шумового сигнала, причём эти распределения не обязательно гауссовские. Кроме того, для получения оценок с минимальной дисперсией необходимо планировать эксперименты таким образом, чтобы статистическое усреднение производилось за полный период псевдослучайной последовательности.

Значительного повышения эффективности статистического моделирования можно достичь за счёт перехода от программных генераторов “псевдослучайных” чисел к аппаратным генераторам случайных чисел. В то же время такой переход требует введения более жесткой системы контроля качества случайных чисел как при периодических испытаниях, так и в динамике, в процессе генерации случайных чисел в рабочем режиме. [7]

В данном пособии производится анализ современных подходов к генерированию случайных процессов с заданными статистическими характеристиками; разработка и экспериментальная проверка алгоритма генерирования и контроля параметров случайных процессов с заданными функциями распределения и автокорреляционными функциями.

1. ФОРМИРОВАНИЕ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СДВИГОВЫХ РЕГИСТРОВ

Двоичный шумовой сигнал позволяет сравнительно просто регулировать уровень постоянной составляющей и эффективное значение выходного напряжения путём точного ограничения уровней этого двоичного сигнала. Однако стационарность и случайность свойств механизма, генерирующего шумовой сигнал, должны быть предметом тщательного исследования.

Вместо чисто аналогового метода генерации случайных процессов часто используют цифровой генератор случайной последовательности, выполненный на сдвиговом регистре. Такой генератор формирует двоичные псевдослучайные шумовые последовательности с любой тактовой частотой. На рис. 1 изображена схема n -разрядного цифрового сдвигового регистра. Максимальная длительность периода, которую можно получить, используя «линейную» цепь обратной связи (сумматор по модулю 2), составляет $2^n - 1$ периодов, соответствующих частоте тактовых импульсов. В самом деле, n -разрядный сдвиговый регистр может находиться в 2^n различных состояниях, однако одно из этих состояний непрерывно самовоспроизводится. На рис. 1 приведены различные варианты получения псевдослучайной последовательности в зависимости от вариантов коммутации сдвигового регистра и цепи обратной связи. Таким образом, можно генерировать различные последовательности, причем максимальная длина таких последовательностей будет $2^n - 1$. Принцип действия сумматора по модулю 2 определяется соответствующей таблицей истинности (табл. 1).

Таблица 1

A	b	c
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

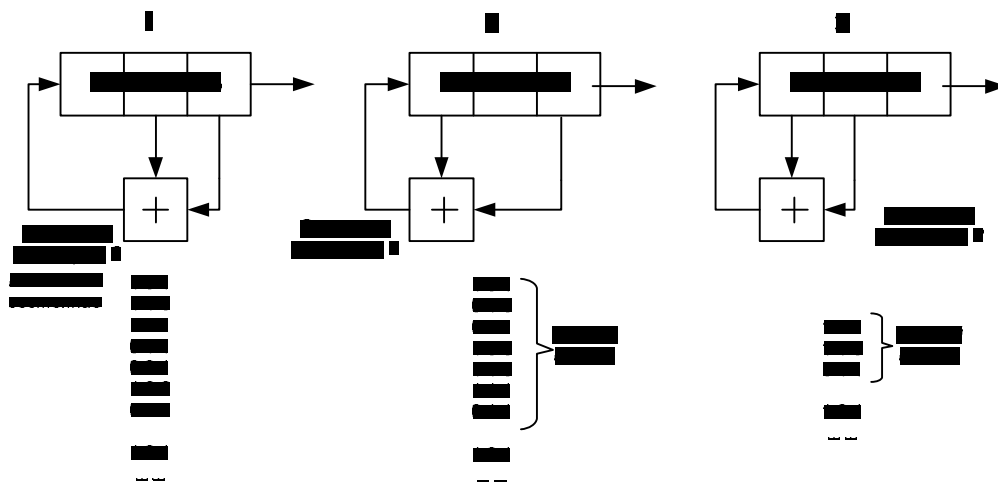


Рис. 1. Схемы трёхразрядного сдвигового регистра ($n=3$), формирующие последовательность максимальной длины, обратную ей последовательность и последовательность не максимальной длины

Для того чтобы получить последовательность максимальной длины, необходимо входы сумматора подключить к разрядам регистра в соответствии с рис.1 (1 и 2) [10]. Сигнал обратной связи, поступающий с выхода сумматора по модулю 2, вводится в первый разряд сдвигового регистра. Входы сумматора подключены к m -му и n -му разрядам регистра. В каждом из приведённых вариантов замена $n-m$ на m также обеспечивает получение последовательности максимальной длины, которая является сдвинутой во времени точной копией последовательности, обратной по отношению к исходной последовательности.

Основываясь на принципах функционирования генератора псевдослучайных последовательностей, построенного на

сдвиговом регистре и сумматоре по модулю 2, была создана его математическая модель в виде m-файла, являющегося приложением среды математического моделирования MatLaB [12]. Приведём ниже листинг программы генерирования двоичных последовательностей максимальной длины:

```
% Алгоритм формирования бинарной псевдослучайной
% последовательности (ПСП)

N=15;% количество разрядов сдвигового регистра
i=1:N;
    u=ones(1,N);% начальное состояние сдвигового регистра
A(i)=u;
    T=(2^N)-1;% период повторения последовательности
for t=1:T
    RndBin(t)=A(N);% out
    a=xor(A(1),A(N));
    B1(1)=a;
    for k=1:N-1
        B(k+1)=A1(k);
    end
    clear A;
    A=B;
    clear B;
    clear a;
end
clear A i k t u;
plot( RndBin)
```

Реализованные указанным способом последовательности максимальной длины, как и случайные последовательности, полученные, скажем, в результате серии независимых испытаний, характеризуются равной вероятностью появления нулей и единиц $P(0)=P(1)=1/2$.

В табл. 2 приведены значения периода повторения последовательности максимальной длины в зависимости от n — количества разрядов сдвигового регистра и способа подключения сумматора по модулю 2 в цепи обратной связи.

Таблица 2

n	m или $n-m$	2^n-1	n	m или $n-m$	2^n-1
3	1	7	18	7	262 143
4	1	15	20	3	1 048 575
5	2	31	21	2	2 097 151
6	1	63	22	1	4 194 303
7	1 или 3	127	23	5 или 9	8 388 607
9	4	511	25	3 или 7	33 554 431
10	3	1 023	28	3, 9 или 13	268 435 455
11	2	2 047	31	3, 6, 7, 13	2 147 438 647
15	1, 4 или 7	32 767	33	13	8 589 934 591

Каждая последовательность, сформированная в сдвиговом регистре, является обязательно периодической. В частности, если рассматривать двоичную последовательность максимальной длины, полученную в сдвиговом регистре с двоичным одноразрядным сумматором, то можно показать, что каждая такая последовательность обладает тремя важными свойствами «псевдослучайности».

Свойство 1. В течение каждого периода максимальной длительности сдвиговый регистр проходит через все возможные «состояния» (состояние характеризуется двоичным числом, хранимым в регистре), за исключением состояния, при котором во всех разрядах записаны нули. Таким образом, каждый период состоит из $p=2^n-1$ цифр, среди которых имеется точно 2^n-1 единиц, а число нулей – на единицу меньше.

Свойство 2. В каждом периоде половина серий (т.е. последовательностей, содержащих только нули или единицы) имеет длину 1 (0 или 1), четверть серий имеет длину 2 (00 или

11) и т.д. Для каждой серии нулей имеется соответствующая серия единиц равной длины.

Свойство 3. Обозначим соответствующие цифры (0 или 1) на выходе через $a_1, a_2, \dots$. Тогда сумма

$$\psi(k) = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n - 1} a_i a_{i+k} = \begin{cases} \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}, [k = 0, \pm(2^n - 1), \pm 2(2^n - 1), \dots] \\ \frac{2^{n-2}}{2^{n-1} - 1}, otherwise \end{cases} \quad (1)$$

равна дискретной автокорреляционной функции, которая является периодической, и принимает только два значения.

1.1. Контроль последовательности случайных чисел по критерию “случайности”

При анализе реальных критериев случайности наиболее удобным для реализации в виде самостоятельного устройства и достаточно эффективным оказался метод “серий”. Согласно этому методу все возможные значения чисел делятся на два класса: класс “а” и класс “б”. Серией, в свою очередь, называется любой отрезок последовательности, состоящий из следующих друг за другом чисел одного и того же класса. Количество чисел в серии называется её длиной:

r_{1i} – число серий класса “а” длины i ;

r_{2i} – число серий класса “б” длины i ;

$R_{1k} = \sum_{i=k}^{n_1} r_{1i}$ – общее число серий класса “а” с длиной, рав-

ной или большей k (n_1 – максимальная длина серии класса “а”);

$R_{2k} = \sum_{i=k}^{n_2} r_{2i}$ – общее число серий класса “б” с длиной, не

меньше k ;

$R_1 = \sum_{k=1}^{n_1} r_{1k}$ – общее число серий класса “а”.

$R_{21} = \sum_{k=1}^{n_2} r_{21k}$ – общее число серий класса “б”.

$R = R_1 + R_2$ – общее число серий.

При контроле случайности методом серий необходимо сопоставить теоретическое и эмпирическое распределение величин R_{1k} , R_{2k} , R_1 , R_2 , R по большой выборке случайных чисел, при этом необходимо задаться доверительной вероятностью $P_{\text{дов}}$. При достаточно большой выборке и равномерном распределении чисел в ней закон распределения R приближенно нормальный. Поэтому при выборках n ($n > 20$) имеет место следующее соотношение [7]:

$$P(R \leq z) \approx 0,5 + \Phi\left(\frac{z + 0,5 - MR}{\sigma R}\right). \quad (2)$$

Учитывая, что математическое ожидание и дисперсия общего числа серий выражаются формулами

$$MR = \frac{n+2}{2}; \quad DR = \frac{n}{4}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \approx \frac{n-1}{4},$$

равенство (2) можно переписать в виде

$$P(R \leq z) \approx 0,5 + \Phi\left(\frac{z + \frac{1}{2} - \frac{n+2}{2}}{0,5\sqrt{n-1}}\right). \quad (3)$$

Практически этой формулой можно пользоваться при $n \geq 20$. Обозначая через U_p нижний предел нормированного уклонения, которому при нормальном законе отвечает вероятность $P(U > U_p) = 0,5 - \Phi(U_p) = \frac{P}{100}$, и полагая

$$z = z_p(R) = \frac{1}{2}(n+1 + U_p \sqrt{n-1}), \quad (4)$$

получим из (3) и (4)

$$P(R < z_p) \approx \frac{P}{100}. \quad (5)$$

Распределение R_1 общего числа серий первого класса

также приближенно нормально при $n \geq 20$ с математическим ожиданием

$$MR_1 \approx \frac{1}{2}MR = \frac{n+2}{4} \quad (6)$$

и дисперсией

$$DR_1 = \frac{n+2}{16} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \approx \frac{n+1}{16}, \quad (7)$$

что позволяет указать для R_1 нижний предел допустимых значений с уровнем значимости $P/100$ %:

$$z_p(R_1) \approx \frac{1}{4}(n + U_p \sqrt{n+1}). \quad (8)$$

Распределение R_{1k} при $k > 2$ хотя и сходится к нормальному, но более медленно и при малых n резко ассиметрично. Для больших k можно с успехом использовать распределение Пуассона

$$P(R_{1k} = v) \approx \frac{a^v}{v!} e^{-a},$$

считая

$$a = \frac{n}{2^{k+1}}. \quad (9)$$

Следовательно, для вероятности найти хотя бы одну серию из чисел класса “а” или “б” длины k или больше, будем иметь приближенно

$$P(R_{1k} \geq 1) = 1 - P(R_{1k} = 0) \approx 1 - e^{-\frac{n}{2^{k+1}}}. \quad (10)$$

Отсюда легко определить критическое значение k , такое, что $P(R_{1k} > 1)$ оказывается равной заданному наперед малому числу α .

Взяв 5% уровень значимости, что соответствует доверительной вероятности $P_{\text{дов}} = 0,95$, выражения (4), (8) и (10) можно переписать в виде

$$z_p \approx \frac{1}{2}(n + 1 + 1,65\sqrt{n-1}); \quad (11)$$

$$z_p(R_1) \approx z_p(R_2) \approx \frac{1}{4}(n + 1,65\sqrt{n+1}); \quad (12)$$

$$z_p(k) \approx \frac{\lg(-\frac{n}{\ln 0,95})}{\lg 2} - 1. \quad (13)$$

При оценке случайности (методом серий) генераторов равномерно распределённых чисел контролю подвергается двоичная последовательность с выхода сдвигового регистра. При этом к первому классу, классу “а”, будем относить единицы, а ко второму классу, классу “б”, – нули. В работе [7] приведена блок-схема устройства проверки вероятностного двоичного элемента (ВДЭ) по критерию случайности методом серий. Основой функционирования данного устройства является математическая модель нахождения серий. Приведем ниже листинг программы метода серий, являющийся продолжением листинга формирования бинарной БСП:

```

N=10000; % Длина выборки
for n=1:N;
    U(n)=Ka(n);
end
clear n;
n=1:N;
for k=1:12;% k – длина серии
A(n)=zeros(1,N);
timer=0;
for i=k+1:N
    if U(i)==0
        A((i-k):(i-1))=1;
        if and(A,U)==A;
            timer=timer+1;
        end
        A((i-k):(i-1))=0;
    end
end
E(k)=timer;
clear i timer ;
end

```

Суть данного алгоритма заключается в следующем.

Случайная последовательность импульсов длины N с выхода ВДЭ проверяется на условие возникновения нуля: $U(i) \neq 0$. При возникновении в i -м разряде нуля, $(i-k, i-1)$ -разряды регистра A , равного по длине вектору последовательности U , заполняются единицами, где k – задаваемая длина серии. При условии полного совпадения содержимого данных разрядов регистров A и U срабатывает счётчик timer. В результате получаем вектор $E(k)$, содержащий информацию о количестве серий длиной k в векторе бинарной ПСП. Данный алгоритм определяет количество серий класса “а”. Для нахождения серий класса “б” в данном алгоритме необходимо заменить третью строку $U(n) = Ka(n)$ строкой $U(n) = 1 - Ka(n)$.

1.2. Контроль последовательности случайных чисел на равномерность

Проверка гипотезы о равномерной плотности распределения последовательности случайных чисел проводится обычно по одному из нескольких критериев: критерию χ^2 , критерию Колмогорова и критерию ω^2 [5, 7]. Все указанные критерии основаны на статистиках, обработка которых осуществляется на ЭВМ.

Критерий Пирсона основан на статистике

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{|\gamma_i - np_i|}{np_i}, \quad (14)$$

где γ_i – количество чисел, попавших в i -й интервал гистограммы распределения;

np_i – математическое ожидание количества чисел, попавших в i -й интервал.

Распределение χ^2 даёт возможность оценить расхождение между гипотетическим распределением и статистическим. Если вероятность p очень мала (не превосходит вы-

бранного уровня значимости α , такого, что событие с вероятностью α считается уже практически невозможным), это значит, что опытные данные противоречат выбранной гипотезе H , состоящей в том, что случайная величина X имеет гипотетическое распределение: эту гипотезу надо отбросить. Если же вероятность p не мала, можно признать расхождения между теоретическим и гипотетическим распределениями несущественными и отнести их за счёт случайных причин. Гипотезу H можно считать правдоподобной, или, по крайней мере, не противоречащей опытным данным.

Помимо описанного выше критерия Пирсона существует ещё один критерий для оценки выдвинутой гипотезы о плотности распределения вероятности – критерий Колмогорова. В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями А. Н. Колмогоров рассматривает максимальное значение модуля разности между статистической функцией распределения $F^*(x)$ и соответствующей теоретической функцией распределения [5, 7]:

$$D = \max(|F^* - F(x)|).$$

Основанием для выбора в качестве меры расхождения величины D является простота её вычисления. Вместе с тем она имеет достаточно простой закон распределения. А. Н. Колмогоров доказал, что, какова бы ни была функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X , при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений n вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda$$

стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2k^2\lambda^2}. \quad (15)$$

Значения вероятности $P(\lambda)$, подсчитанные по формуле (15) приведены в табл 3.

Таблица 3

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,0	1,000	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,000	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,000	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,000	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

1.3. Контроль корреляционной функции последовательности случайных чисел с заданными статисти- ческими характеристиками

При решении ряда статистических задач на ЭВМ с помощью генераторов случайных функций часто оказывается необходимым иметь возможность контроля корреляционной функции генерируемой последовательности случайных чисел. Для контроля корреляционной функции последовательности случайных чисел на выходе генератора случайных функций необходим цифровой коррелометр, который был бы прост по конструкции и в то же время с достаточным быстродействием и точностью позволял бы получать оценки корреляционной функции случайной числовой последовательности с произвольным законом распределения. Обладающий всеми необходимыми техническими характеристиками коррелометр был предложен в работе [7]. Основываясь на результатах, полученных в данной работе, была разработана математическая модель вычисления автокорреляционной функции случайной числовой последовательности, являющаяся продолжением листинга формирования бинарной ПСП:

**%Исследование Автокорреляционной функ
%ции (АКФ) случайной числовой последова
%тельности.**

**% Преобразование бинарной случайной последо
%вательности в последовательность равномерно
%распределённых в интервале
% [0:1] случайных чисел**

```
M=round(N);% Длина двоичного слова
n=1:M;
for k=1:T/M
E(k,n)=dec2bin(RndBin((k-1)*M+1:k*M));
%E(k,n)-матрица
% матрица состоящая из двоичных слов длиной
M.
end
clear n Ka k;
D=bin2dec(E);% D-вектор, состоящий из десятич
ных чисел,
% соответствующих двоичным числам вектора D.
clear B i j ;
n=1:M;
Norma2(1,n)=dec2bin(ones(1,M));
% максимально возможное двоичное число длины
N
Norma10=bin2dec(Norma2);
Randsig=D./(Norma10);
clear Norma2 Norma10;
korr=(1/(T/M))*xcov(Randsig);
mu=round(T/M);
korrelation=korr(mu:2*mu1)
%Автокорреляционная функция
clear Randsig
k=1:11;
plot((k-1),korrelation(1:11)); % Вывод графика
% экспериментальной АКФ
% Теоретическая АКФ
```

```

for i=1:11
    if i==1
        hh(i,1)=1/12;
    else hh(i,1)=0;
    end
end
error=sqrt((hh(1:11)-korrelation(1:11)).^2);%модуль
разности
%экспериментальной и теоретической АКФ
clear D H M N Randsig1 T hh i k korr korrelation n

```

Смысл данного алгоритма поясним ниже.

Из исходной двоичной последовательности формируется вектор E , состоящий из двоичных слов длины M . Длина двоичного многоразрядного слова M выбирается таким образом, чтобы автокорреляционная функция вектора E имела минимальную ошибку относительно теоретической функции корреляции. Далее, полученный вектор E преобразуем в равный ему по длине вектор D , состоящий из десятичных чисел, соответственно равных многоразрядным числам вектора E , и нормируем его на величину **Norma10**. В результате произведённых операций получаем вектор **Randsig**, состоящий из равномерно распределённых в интервале $[0,1]$ десятичных чисел. Используя `xcov` – стандартную функцию среды математического моделирования **MatLab** находим автокорреляционную функцию (АКФ) сформированного процесса – `korrelation` [12]. Сравнивая полученную АКФ с теоретической, находим её среднеквадратическое отклонение.

1.4. Проверка последовательности равномерно распределённых чисел на выходе модели генератора, реализованного по схеме сдвигового регистра

При контроле генератора случайных чисел методом серий критериями согласия могут служить: количество серий максимальной длины любого класса, а так же общее количе-

ство серий обоих классов.

Теоретические значения математического ожидания серий обоих классов “а” и “б” длины i могут быть определены из соотношения

$$Mr_{1i} = Mr_{2i} \approx \frac{n}{2^{i+2}}, \quad (16)$$

где n – длина выборки;

i – длина серии.

В табл. 4 представлены результаты исследования модели 11-разрядного генератора двоичных последовательностей максимальной длины по методу “серий”. Объём выборки составил $n=10000$ двоичных случайных чисел.

Используя (1.10), найдём

$$P(R_{1,14} \geq 1) = 1 - e^{-\frac{n}{12+1}} = 1 - e^{-\frac{10000}{13}} = 0,7. \quad (17)$$

Из (15) видно, что вероятность получения серий максимальной длины вполне согласуется с опытными данными.

Используя соотношение (11), найдём нижний предел общего числа серий при $P_{\text{дов}} = 0,95$:

$$z_p(R) = \frac{1}{2}(n+1-1,65\sqrt{n-1}) = 4918.$$

Следовательно, общее число обоих классов при выборке $n = 10000$ должно быть $R \leq 4918$, что также согласуется с экспериментальными данными.

Для исследования выбраны два наиболее жёстких критерия, применяемых на практике. Это критерий случайности по методу серий и критерий на некоррелированность по тесту корреляций.

Таблица 4

Длина серии i	Фактическое число Серий			Ожидаемое число серий		
	r _{1i}	r _{2i}	r _i	Mr ₁ i=Mr _{2i}	MR 1k	MR k
1	1264,9	1243,9	2508,8	1250	2500	5000
2	640,4	628,2	1268,6	625	1250	2500
3	310,9	312	622,9	312,5	625	1250
4	160,4	159,2	319,6	156,25	312,5	625
5	80,6	75,2	155,8	78	156,25	312,5
6	38,9	34,8	73,7	39	78	156,25
7	21,6	17,7	39,3	19,5	39	78
8	12,5	8,9	21,4	9,75	19,5	39
9	7,2	5	12,2	4,87	9,75	19,5
10	2,1	2,4	4,5	2,435	4,87	9,75
11	1,6	1,4	3	1,217	2,435	4,87
12	0,6	0,7	1,3	0,685	1,217	2,435
Экспериментальный нижний предел общего количества серий в 10-ти испытаниях составил 5033,1				Теоретический ниж- ний предел общего ко- личества серий при Р _{дов} = 0,95 составил 4918		

Рассматривая исходную равномерно распределённую числовую последовательность как реализацию стационарного некоррелированного случайного процесса X_n , $N=1,2,\dots,n$, можно сравнить теоретическую и эмпирическую автокорреляционные функции [7]. При этом значения эмпирической автокорреляционной функции

$$B(\tau) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X_i \cdot X_{i+\tau} - \frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} X_i \right)^2, \quad (18)$$

$$t=0,1,\dots,\tau_m$$

должны быть близкими к значениям теоретической корреляционной функции

$$B(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{12}, \tau = 0, \\ 0, \tau \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

так, что с вероятностью P выполняется неравенство

$$|\hat{B}(\tau) - B(\tau)| \leq t_p \cdot \frac{\chi}{12 \cdot \sqrt{N-1}}, \quad (20)$$

где $\chi = 1$ для $\tau \geq 1$, $\chi = \sqrt{2}$ для $\tau = 0$.

Соотношение (18) справедливо для случая, когда X_i – равномерно распределённая в интервале от 0 до 1 случайная последовательность. $B(0) = \frac{1}{12}$ – значение автокорреляционной функции в момент времени $\tau = 0$ определяет значение дисперсии сигнала X_i .

Экспериментальной проверке подвергалась выборка чисел, сформированных датчиком, реализованным по схеме сдвигового регистра с объёмом $n = 10000$ элементов. Полученная автокорреляционная функция представлена на рис.2.

Для доверительной вероятности $P_\delta = 0.99$, $t_p = 2,58$ [7] значения модуля разности теоретической и эмпирической корреляционных функций в соответствующие моменты времени t представлены в табл. 5.

Анализ таблицы показывает, что неравенство (20) для исследуемой выборки выполняется.

Следовательно, можно утверждать, что последовательность X_N , $N = 1, 2, \dots, 10000$ является некоррелированной. Таким образом, сформированная последовательность оказывается вполне пригодной для статистического моделирования.

Таблица 5

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ B(\tau) - B(\tau) $	1.2801e-006	0,0006	0,0008	0,0004	0,0006	0,002	0,0003	0,0008	0,0002	0,0002
$t_p \cdot \frac{\chi}{12 \cdot \sqrt{N-1}}$	0,003	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022	0,0022

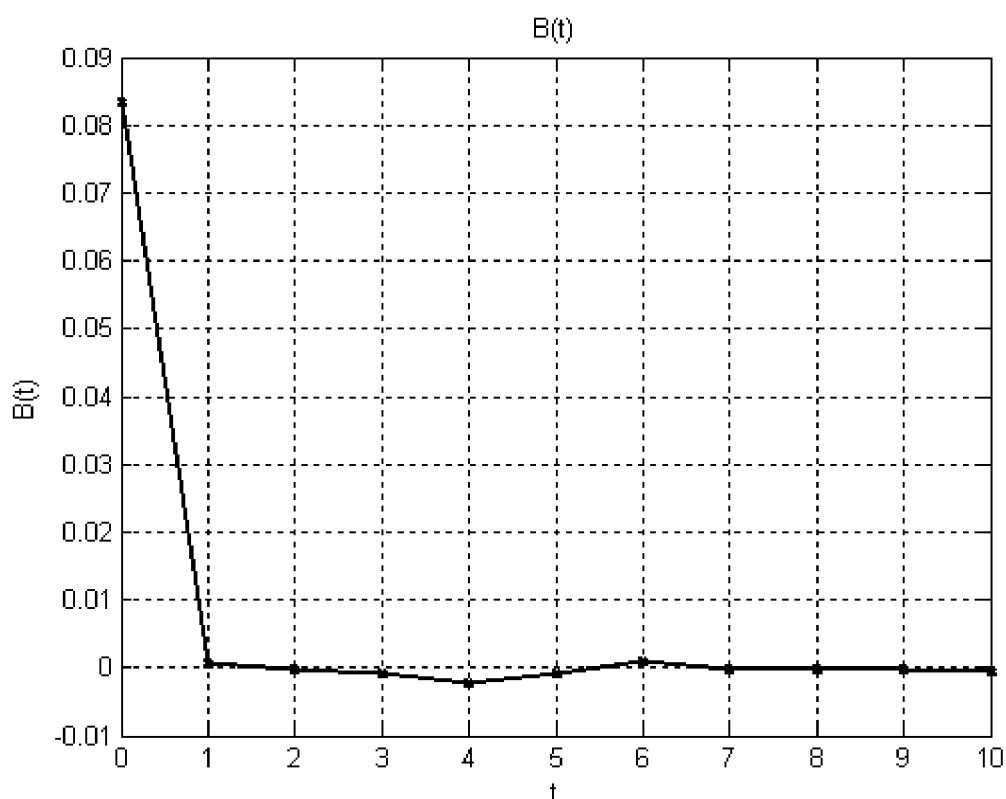


Рис. 2. Автокорреляционная функция процесса на выходе генератора

Для проверки гипотезы о плотности распределения последовательности случайных чисел использовались критерий равномерности χ^2 (критерий Пирсона) и критерий Колмогорова. Проверке подвергалось четыре выборки по 4096 чисел в каждой, область распределения случайных чисел при этом разбивалась на десять равных интервалов. Количество чисел, попавших в каждый интервал, приведено в табл. 6.

Таблица 6

№ п/п интервалов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-я выборка	423	412	400	419	399	398	394	407	417	426
2-я выборка	417	427	406	414	394	405	392	419	405	416
3-я выборка	419	421	401	423	393	413	401	410	400	414
4-я выборка	411	420	402	418	398	413	399	426	391	417

Используя выражение (14), подсчитаем значение χ^2 для каждой выборки:

$$\chi_1^2 = 2,8974; \quad \chi_2^2 = 2,7277; \quad \chi_3^2 = 2,3065; \quad \chi_4^2 = 2,8486.$$

Так как параметры распределения известны, то число степеней свободы ρ определяется как

$$\rho = l - 4 = 10 - 4 = 6.$$

По значениям χ^2 и $\rho = 6$ с помощью табл. 3 прил. [5] определяем вероятности P того, что величины χ^2_ρ с ρ степенями свободы, превзойдут данные значения χ^2 . Значения этих вероятностей для всех четырёх выборок будут приблизительно равны $P = 0.8$. Проверка по критерию согласия Колмогорова даёт схожие результаты, что говорит о том, что выдвинутая гипотеза равномерности распределения чисел в выборках правдоподобна.

2. ГЕНЕРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДАННОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ И ОДНОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Уделим внимание одному из возможных методов генерирования случайных процессов с заданными статистическими характеристиками. Данный метод является наиболее перспективным и требует минимума вычислительных затрат. За основу разрабатываемой структурной схемы алгоритма возьмём структурную схему, приведённую на рисунке 3, которая будет претерпевать некоторые видоизменения в процессе разработки.

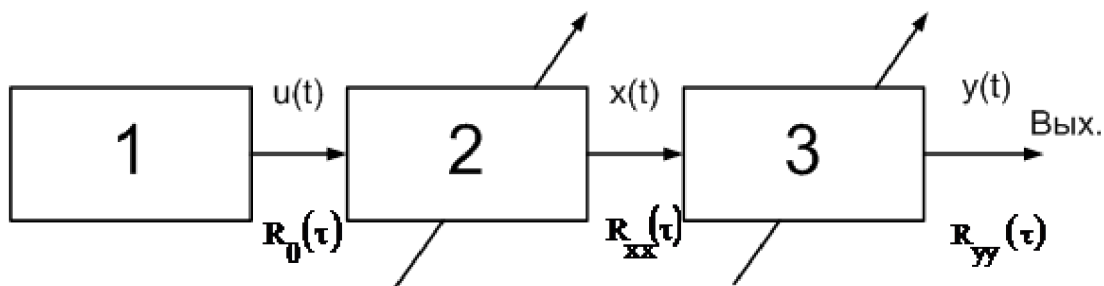


Рис. 3. Структурная схема алгоритма моделирования случайных процессов: 1 – генератор нормального шума (ГНШ), 2 – линейный формирующий фильтр (ФФ), 3 – перестраиваемый нелинейный функциональный преобразователь (НФП)

Кривую функционального преобразования НФП можно найти из уравнения

$$f(y) = f(x) \times \left| \frac{d}{dy} x \right|,$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}$ – дифференциальный закон нормального распределения амплитуд шумового генератора.

Корреляционная функция случайного процесса на входе НФП рассчитывается по заданной функции корреляции на выходе, т. е. автокорреляционной функции сигнала $Y(t)$, с учетом параметров НФП из соотношения, представляющего собой разложение функции корреляции $R_{yy}(x)$ выходного случайного процесса в ряд по степеням нормированной функции корреляции входного шума:

$$R_{yy}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \cdot \frac{r_{xx}^n(\tau)}{n!}, \quad (21)$$

где $C_n = C_n(m_x, \sigma_x, A_i)$ – коэффициенты разложения, зависящие от параметров входного сигнала и нелинейного преобразователя, которые определяются по формуле:

$$c_n(m_x, \sigma_x, A_i) = \int_{-\infty}^{\infty} y(m_x + \sigma_x \cdot \zeta) \cdot \psi^{(n)}(\zeta) d\zeta, \quad (22)$$

$$\zeta = \frac{x - m_x}{\sigma_x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\zeta^2}{2}}.$$

где

С достаточной для инженерной практики точностью можно ограничиться тремя членами разложения, тогда (21) запишется в виде

$$R_{yy} = \mathbb{E}(C_1)^2 \cdot r_{xx}(\tau) + \frac{\mathbb{E}(C_2)^2}{2} \cdot \mathbb{E}(r)_{xx(\tau)} + \frac{\mathbb{E}(C_3)^2}{2} \cdot \mathbb{E}((r)_{xx}(\tau)) \quad (23)$$

Решая уравнение (23) относительно $r_{xx}(\tau)$ при значениях

$R_{yy}(\tau)$, соответствующих различным значениям τ , можно получить функцию корреляции входного шума НФП. Считая спектральную плотность $S_u(\omega)$ широкополосного шума на выходе генератора нормального шума постоянной в полосе пропускания формирующего фильтра и располагая выражением для спектральной плотности $S_x(\omega)$ случайного процесса на выходе формирующего фильтра, представляющего собой Фурье-преобразование $R_{xx}(\tau)$, можно рассчитать передаточную функцию линейного формирующего фильтра:

$$|K(\omega)| = \frac{S_x(\omega)}{S_y(\omega)}.$$

Для определения передаточной функции формирующего фильтра необходимо располагать $Sx(\omega)$, представленной в виде дробно-рациональной функции квадрата частоты ω .

Приведём алгоритм работы линейного цифрового фильтра для получения случайной числовой последовательности с заданной корреляционной функцией [4] из последовательности некоррелированных случайных чисел с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Пусть случайный стационарный процесс $x(t)$ задан корреляционной функцией $R(\tau)$, где $\tau = t_i - t_j$. Требуется получить значения функции аргумента $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$.

Представим искомые реализации в виде

$$\left. \begin{aligned} x(t_1) &= c_1\eta_1 + c_2\eta_2 +c_n\eta_n; \\ x(t_2) &= c_1\eta_2 + c_2\eta_3 +c_n\eta_{n+1}; \\ \\ x(t_n) &= c_1\eta_{n1} + c_2\eta_{n+1} +c_n\eta_{2n-1}; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где η_i – некоррелированные случайные числа с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 .

Коэффициенты c_k можно определить заранее, пользуясь соотношением вида

$$R(t_k - t_1) = (c_1 \cdot c_k + c_2 \cdot c_{k+1} + \dots + c_{n-k+1} \cdot c_n) \cdot \sigma^2. \quad (25)$$

В некоторых случаях система (24) решается точно, в других случаях используются различные численные методы. Недостаток данного алгоритма заключается в том, что здесь не используется обратная связь, которая значительно сокращает число перемножений при получении каждого значения $x(t)$. Свободный от данного недостатка алгоритм описан в [7]. Случайный некоррелированный сигнал вычисляется по формуле

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_p x_{n-p} + b_1 \zeta_{n-1} + \dots + b_2 \zeta_{n-2} + \dots + b_q \zeta_{n-q}, \quad (26)$$

где p – количество заданных коэффициентов a_i ;

q – количество заданных коэффициентов b_i ;

(p и q определяются параметрами фильтра);

$x_i = x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-p}$ – последовательность предыдущих значений коррелированного случайного сигнала;

$\zeta_n = \sigma_\zeta \cdot \eta$ – случайная величина, компонента x_{n+1} ;

σ_ζ^2 – дисперсия ζ_n ;

$\zeta_i = \zeta_{n-1}, \zeta_{n-2}, \dots, \zeta_{n-q}$ – последовательность предыдущих значений компонент коррелированного случайного сигнала; (дисперсия $\sigma_\zeta^2 = 0$ и математическое ожидание $m_\zeta = 0$).

Описанный алгоритм для моделирования случайной числовой последовательности является удобным для его реализации в виде автономного устройства, служащего приставкой к ЭВМ.

Структурная схема генератора, реализующая данный алгоритм, представлена на рис. 4.

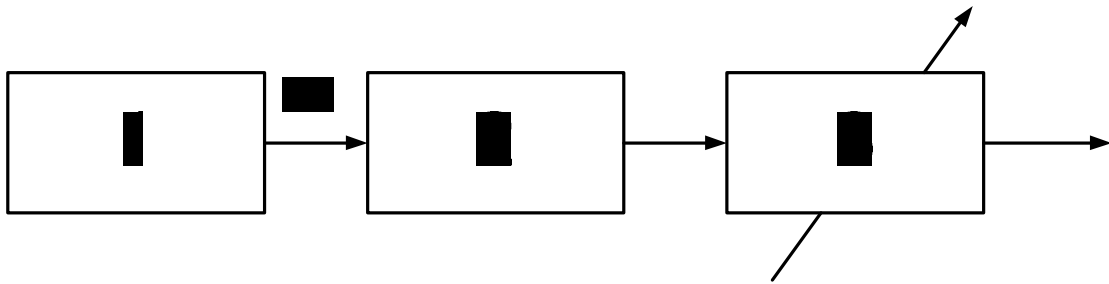


Рис. 4. Структурная схема генератора нормально распределённого шума: 1 – генератор равномерно распределённых чисел (RND), 2 – функциональный преобразователь, 3 – перестраиваемый линейный цифровой фильтр

Равномерно распределённая последовательность случайных чисел, представляющая собой случайную функцию $x(t)$ с равномерным спектром в заданной полосе частот, подаётся на функциональный преобразователь, с выхода которого нормально распределённая числовая последовательность с равномерным спектром в заданной полосе частот поступает на вход перестраиваемого линейного цифрового фильтра, где формируется заданная спектральная плотность, а закон распределения не изменяется. Использование алгоритма рекурсивного цифрового фильтра в комбинации с чисто логическим функциональным преобразованием числовой последовательности [7] даёт возможность получить максимальное быстродействие при сохранении точности задания статистических параметров моделируемой случайной функции.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ

ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ

При разработке алгоритма генерирования цифровых моделей случайных процессов с заданными статистическими характеристиками будем придерживаться структурной схемы, приведённой на рис. 3, выбранной в предыдущем разделе.

Суть алгоритма сводится к следующему:

- по заданной выходной плотности вероятностей находим амплитудную характеристику НФП, затем рассчитываем коэффициенты C_n , причем они не зависят от вида АКФ на выходе НФП;

- находим значения нормированной функции корреляции на входе НФП и синтезируем фильтр, свертка импульсных характеристик которого совпадает с нормированной АКФ на входе НФП.

Разрабатываемый алгоритм поясним на нескольких примерах генерирования цифровых моделей случайных процессов.

3.1. Пример 1

Расчёт амплитудной характеристики (АХ) НФП и параметров формирующего фильтра для получения случайного процесса с рэлеевским распределением и с корреляционной функцией вида:

$$R_{yy}(\tau) = \sigma_y^2 e^{-\tau/\tau_0},$$

где $\tau_0 = 1$ мс.

На выходе генератора нормального шума имеем гауссовский случайный процесс с равномерной спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-4}$ [В²/Гц] в пределах полосы пропускания формирующего фильтра.

- Определение АХ НФП.

Запишем выражения для плотностей вероятностей на входе и выходе НФП:

– на входе (нормальное распределение):

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}} ;$$

– на выходе (распределение Рэлея):

$$f_y(y) := \frac{y}{(\sigma_y)^2} \cdot e^{\frac{-y^2}{2(\sigma_y)^2}} .$$

Для определения АХ НФП приравняем площади под кривыми:

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx := \int_{-\infty}^y f(y) dy .$$

Вычисляя интегралы и решая полученное уравнение относительно y , получим выражение для АХ НФП:

$$Y(x) := \sqrt{2} \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{\ln(2) - \ln\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)\right)} .$$

График АХ НФП изображен на рис. 5.

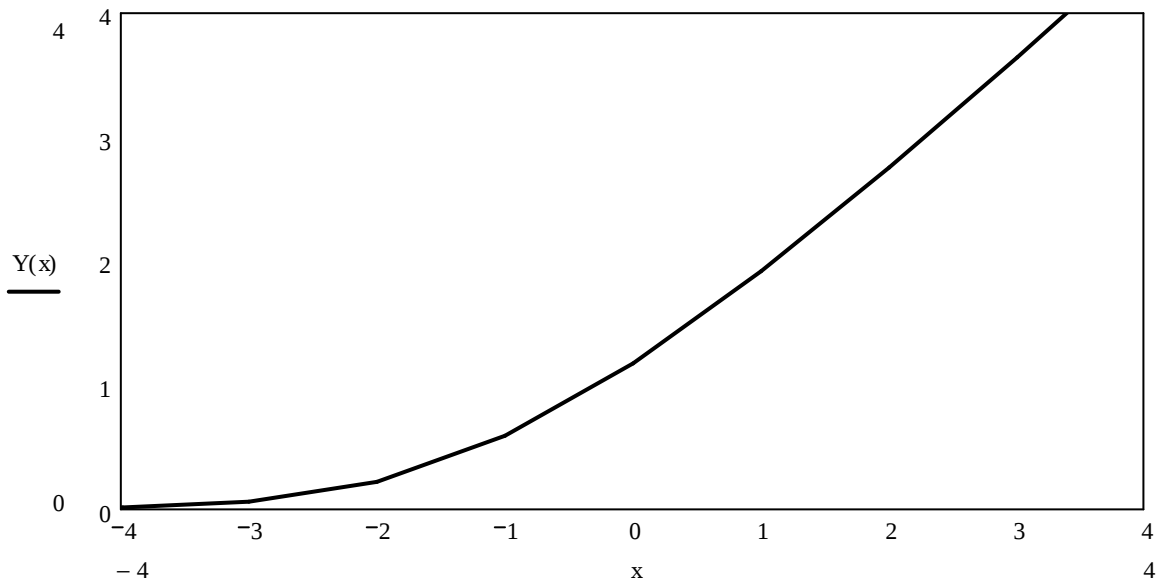


Рис. 5. Нормированная амплитудная характеристика нелинейного функционального преобразователя

- Вычисление коэффициентов C_n .

После численного интегрирования получим следующие значения квадратов коэффициентов:

$$C1^2 = 0.4173869306 \quad (C2)^2 = 0.0226963099$$

$$C3^2 = 2.69544923714 \times 10^{-3}.$$

- Вычисление значений нормированной корреляционной функции процесса на входе НФП

Продискретизируем корреляционную функцию процесса $y(t)$ на отрезке $[0,3]$ мс. Решая в этих точках уравнение (23) нормируя полученные отсчеты $\rho(\tau)$ на максимум $\rho(0)$, получим значения нормированной функции корреляции шума на входе НФП.

Графики нормированных функций корреляции на входе и выходе приведены на рис. 6.

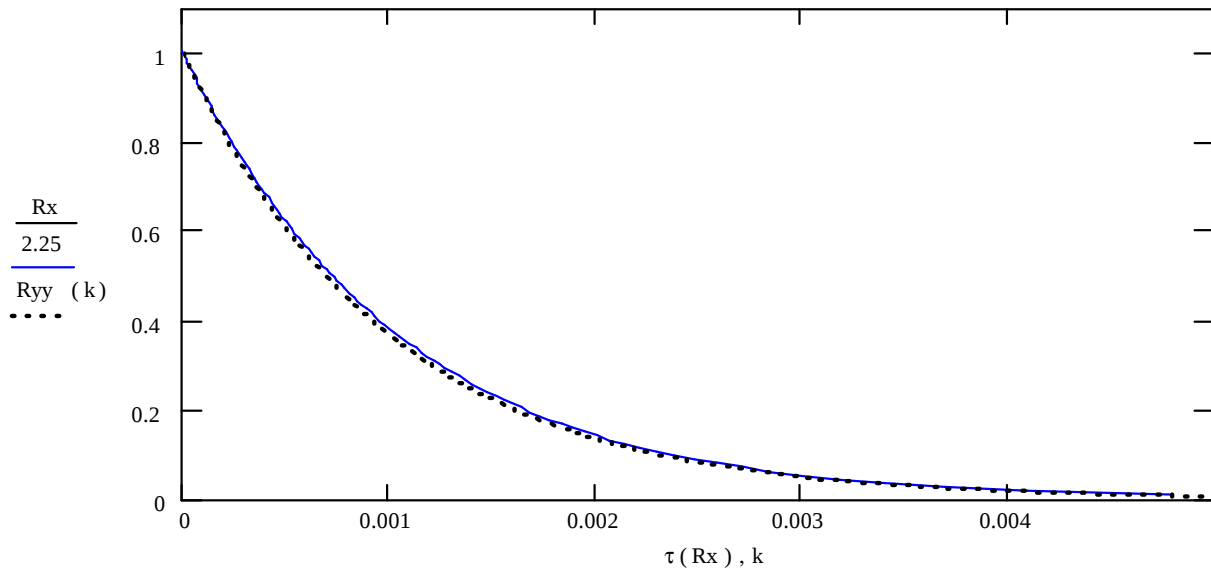


Рис. 6. Графики нормированных функций корреляции на входе и выходе НФП

- Выбор типа формирующего фильтра и определение его параметров.

По графику корреляционной функции можно предположить, что в качестве формирующего фильтра можно использовать ФНЧ 1-го порядка с постоянной времени несколько большей τ_0 . Наилучшее приближение дает ФНЧ с постоянной времени — 1,05 мс.

- Результаты компьютерного моделирования.

В результате моделирования процесса с заданными функцией распределения и корреляционной функцией получим процесс, реализация которого представлена на рис. 7.

Гистограмма статистического распределения случайного процесса на выходе НФП и теоретическое рэлеевское распределение представлены на рис. 8.

На рис. 9 приведены теоретическая (сплошная линия) и полученная (пунктирная линия) функции автокорреляции сигнала на выходе НФП.

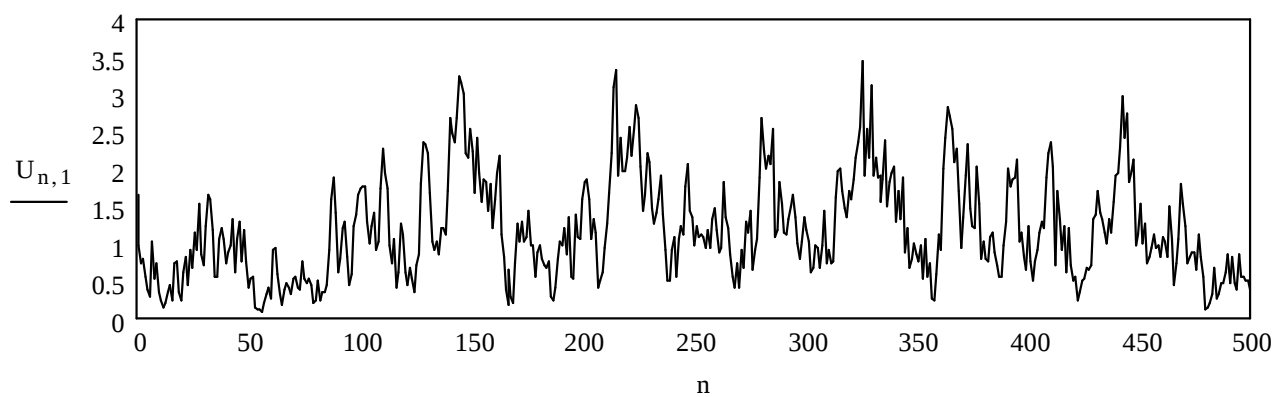


Рис. 7. Реализация процесса на выходе НФП

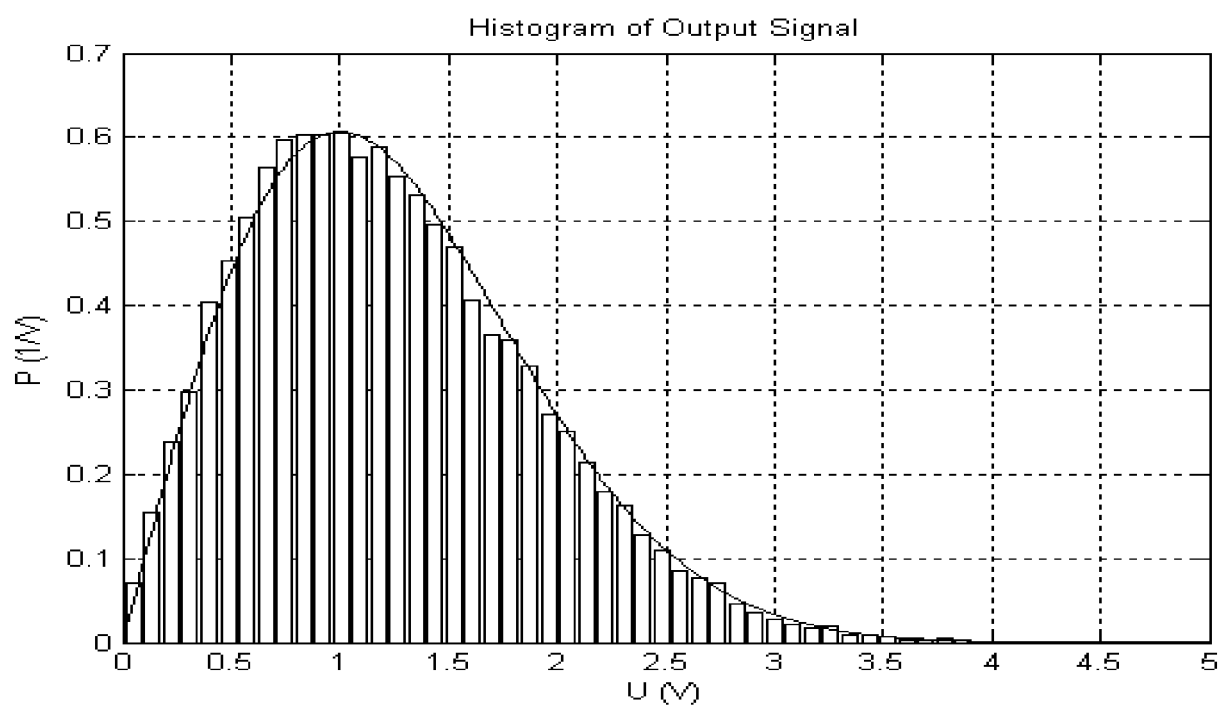


Рис. 8. Теоретическая функция плотности распределения Релея и гистограмма оценки плотности вероятности

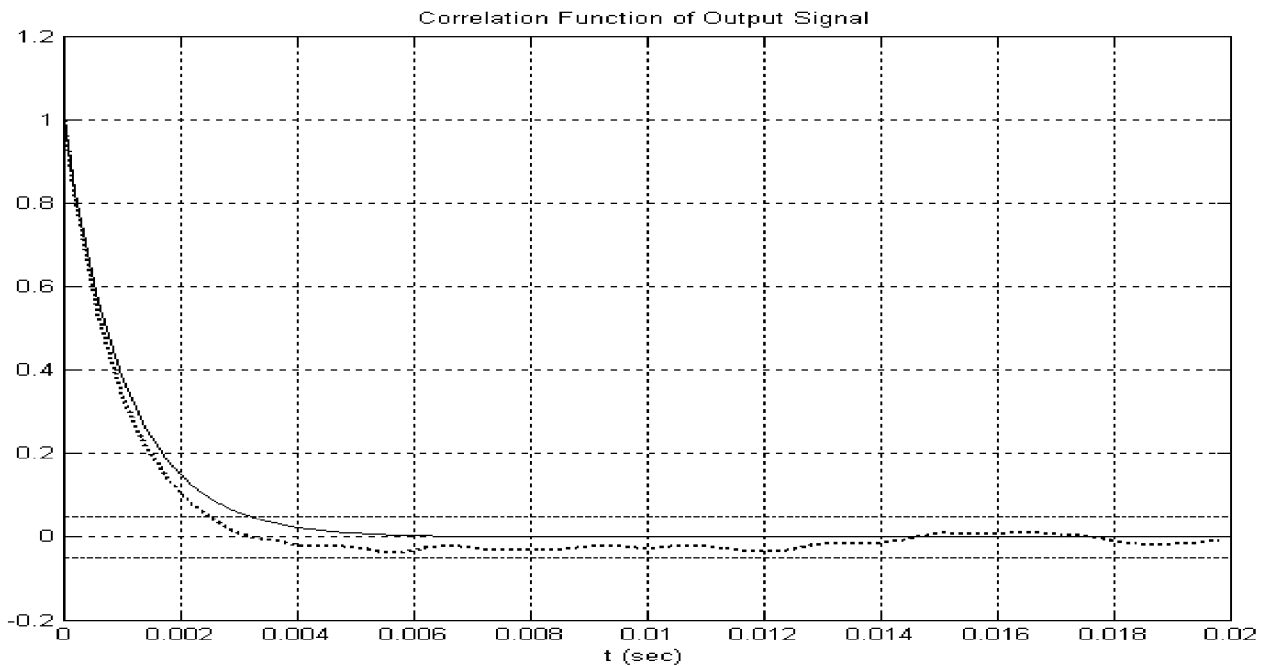


Рис. 9. Теоретическая (сплошная линия) и полученная в результате моделирования (пунктирная линия)

3.2. Пример 2

Расчёт амплитудной характеристики (АХ) НФП и параметров формирующего фильтра для получения случайного процесса с показательным распределением и с корреляционной функцией вида:

$$R_{yy}(\tau) = \sigma_y^2 e^{-\tau/\tau_0},$$

где $\tau_0 = 1$ мс.

На выходе генератора нормального шума имеем гауссовский случайный процесс с равномерной спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-4}$ [В²/Гц] в пределах полосы пропускания формирующего фильтра.

- Определение АХ НФП. Запишем выражения для плотностей вероятностей на входе и выходе НФП:

– на входе (нормальное распределение):

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_x^2}};$$

–на входе (показательное распределение):

$$f_y(y) := \frac{y}{my} \cdot e^{\frac{-y}{my}}$$

Для определения АХ НФП приравняем площади под кривыми:

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx := \int_{-\infty}^y f(y) dy$$

Вычисляя интегралы и решая полученное уравнение относительно y , получим выражение для АХ НФП:

$$Y(x) := my \cdot \left(\ln(2) - \ln \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2} \sigma_x} \right) \right) \right)$$

График АХ НФП изображен на рис.10.

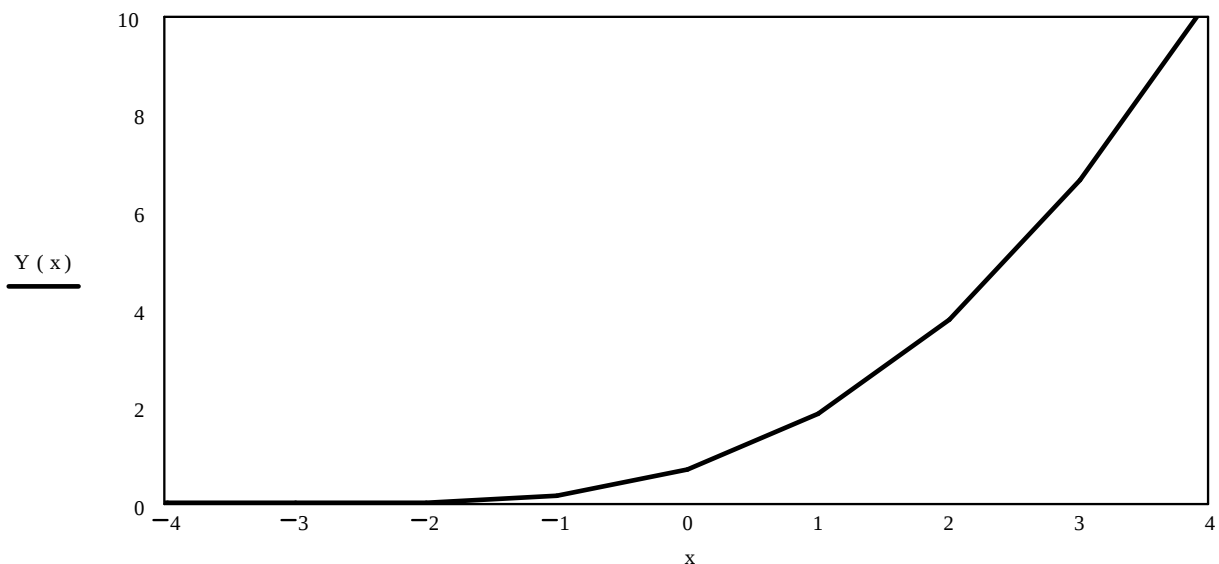


Рис. 10. Нормированная амплитудная характеристика нелинейного функционального преобразователя для получения шума с показательным распределением из нормального

- Вычисление коэффициентов C_n .

После численного интегрирования получим следующие значения квадратов коэффициентов:

$$C1^2 = 0.8157653366 ; (C2)^2 = 0.3547817645 ;$$

$$C3^2 = 4.0108402132 \times 10^{-2} .$$

- Вычисление значений нормированной корреляционной функции процесса на входе НФП.

Продискретизируем корреляционную функцию процесса $y(t)$ на отрезке $[0,3]$ мс. Решая в этих точках уравнение (23) нормируя полученные отсчеты $\rho(\tau)$ на максимум $\rho(0)$, получим значения нормированной функции корреляции шума на входе НФП.

Графики нормированных функций корреляции на входе и выходе приведены на рисунке 11.

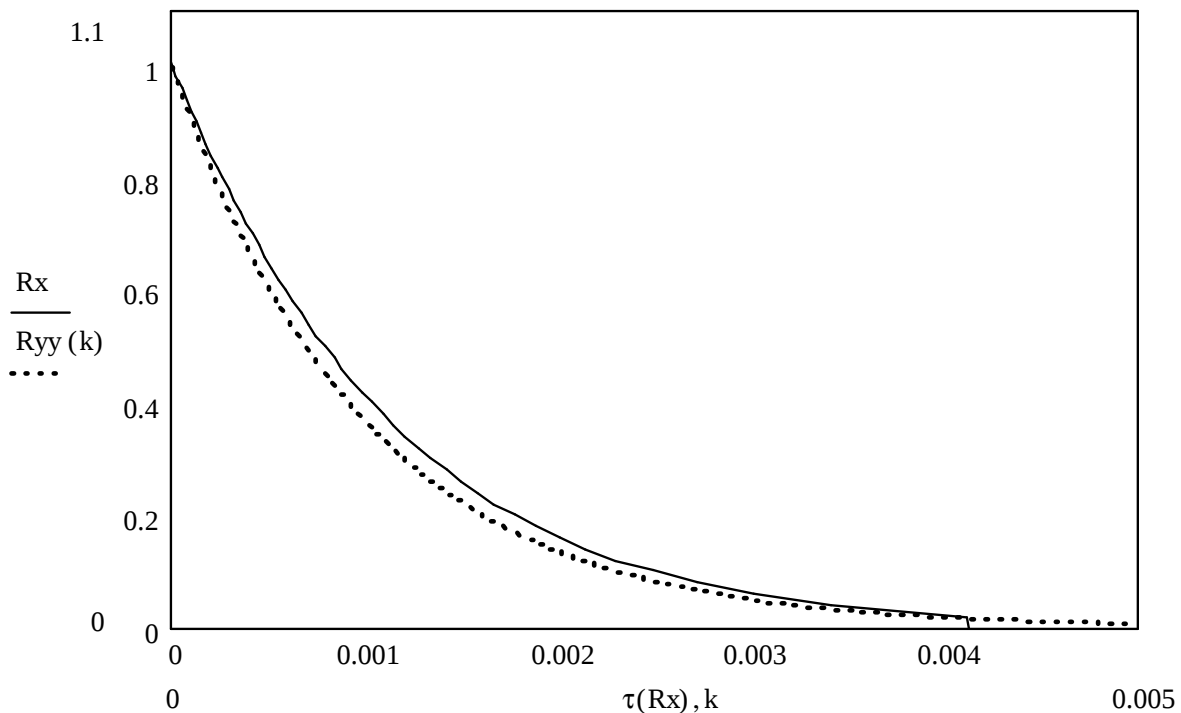


Рис.11 Графики нормированных функций корреляции на входе и выходе НФП

- Выбор типа формирующего фильтра и определение его параметров.

По графику корреляционной функции можно предположить, что в качестве формирующего фильтра можно использовать ФНЧ 1-го порядка с постоянной времени несколько большей τ_0 . Наилучшее приближение дает ФНЧ с постоянной времени – 1,05мс.

- Результаты компьютерного моделирования.

В результате моделирования процесса с заданными функцией распределения и корреляционной функцией получим процесс, реализация которого представлена на рис. 12.

Гистограмма статистического распределения случайного процесса на выходе НФП и теоретическое показательное распределение представлены на рис. 13.

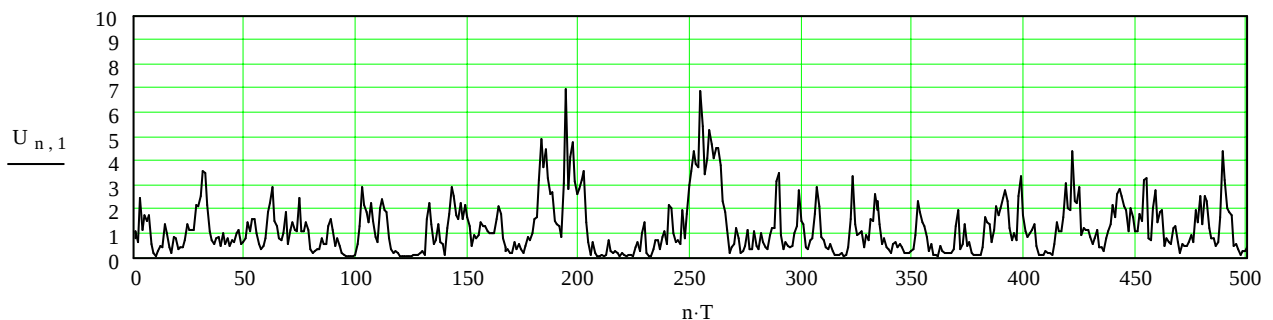


Рис. 12. Реализация процесса на выходе НФП

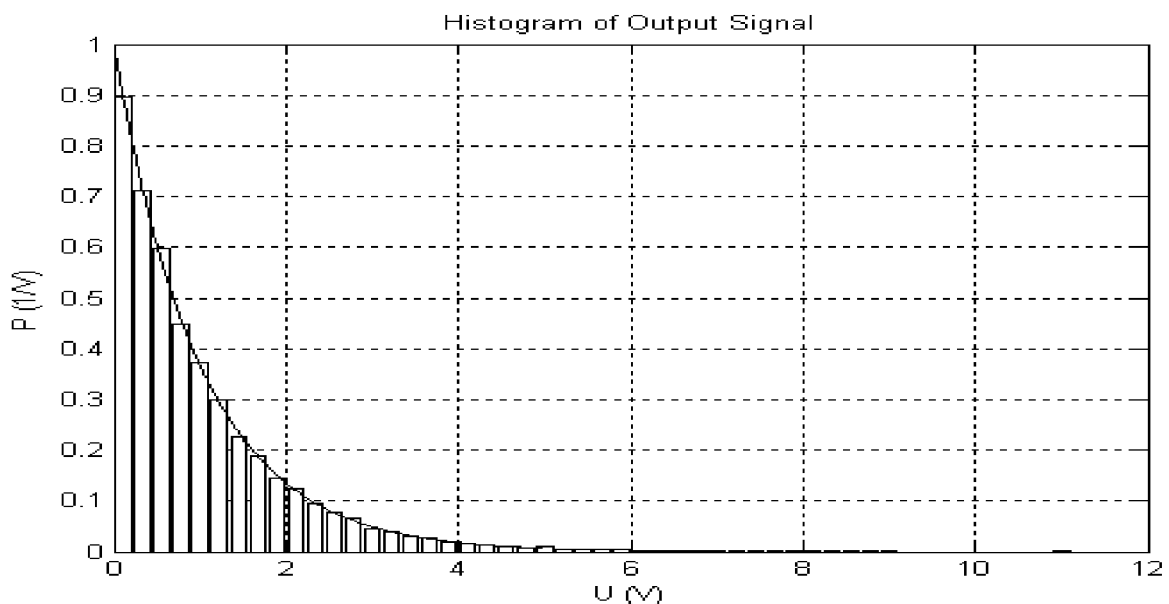


Рис. 13. Теоретическая показательная функция плотности распределения и гистограмма оценки плотности вероятности

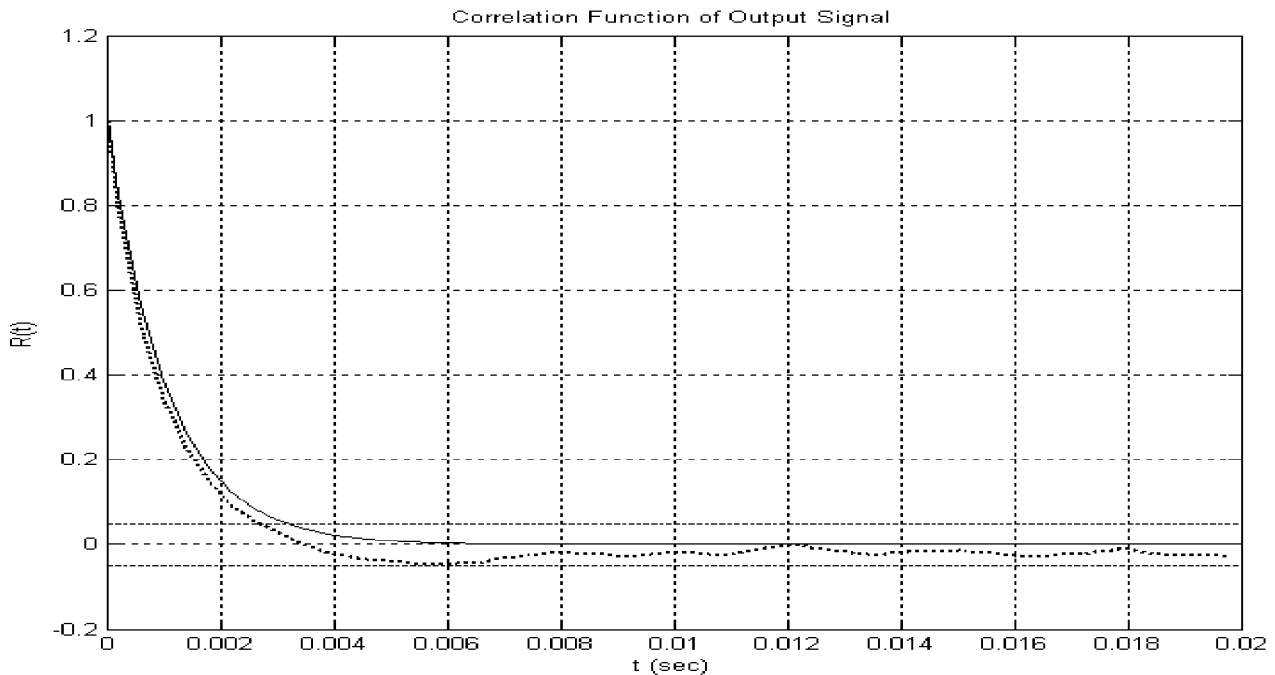


Рис. 14. Теоретическая (сплошная линия) и полученная в результате моделирования (пунктирная линия)

На рис. 14 приведены теоретическая (сплошная линия) и полученная (пунктирная линия) функции автокорреляции сигнала на выходе НФП.

3.3. Пример 3

Расчёт амплитудной характеристики (АХ) НФП и параметров формирующего фильтра для получения случайного процесса с равномерным распределением и с корреляционной функцией вида :

$$R_{yy}(\xi) := (\sigma_y)^2 \cdot \left(e^{\frac{-|\xi|}{\tau}} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \xi) \right),$$

где $\tau_0 = 2$ мс, $f_0 = 1$ кГц, $\sigma_y = 1$ В.

На выходе генератора нормального шума имеем гауссовский случайный процесс с равномерной спектральной плотностью мощности $N_0 = 10^{-4}$ [В²/Гц] в пределах полосы пропус-

кания формирующего фильтра.

- Определение АХ НФП.

Запишем выражения для плотностей вероятностей на входе и выходе НФП:

– на входе (нормальное распределение):

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2 \cdot \sigma_x^2}} ;$$

– на выходе (равномерное распределение):

$$K(s_i) := \begin{cases} \frac{1}{m_y} & \text{if } 0 \leq s_i \leq m_y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ,$$

где $m_y = \sqrt{3} \cdot \sigma_y$.

Для определения АХ НФП приравняем площади под кривыми:

$$\int_{-\infty}^x f(x) dx := \int_{-\infty}^y f(y) dy .$$

Вычисляя интегралы и решая полученное уравнение относительно y , получим выражение для АХ НФП:

$$Y(x) := \frac{m_y}{2} \cdot \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2} \sigma_x} \right) + 1 \right)$$

График АХ НФП изображен на рис. 15 и имеет вид сглаженного ограничителя:

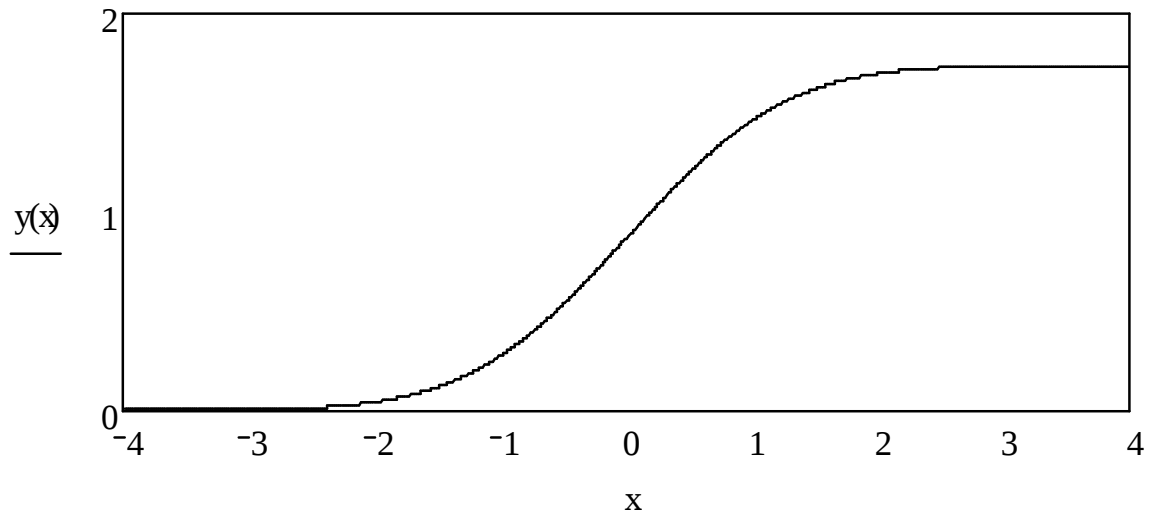


Рис. 15. Нормированная амплитудная характеристика нелинейного функционального преобразователя

- Вычисление коэффициентов C_n .

После численного интегрирования получим следующие значения квадратов коэффициентов:

$$C_1^2 = 0.2387324146 \quad (C_2)^2 = 0 \quad C_3^2 = 5.96831036595 \times 10^{-2}.$$

- Вычисление значений нормированной корреляционной функции процесса на входе НФП.

Продискретизируем корреляционную функцию процесса $y(t)$ на отрезке $[0, 3]$ мс.

Решая в этих точках уравнение (23) и нормируя полученные отсчеты $\rho(\tau)$ на максимум $\rho(0)$, получим значения нормированной функции корреляции шума на входе НФП. Графики нормированных функций корреляции на входе и выходе приведены на рис.16

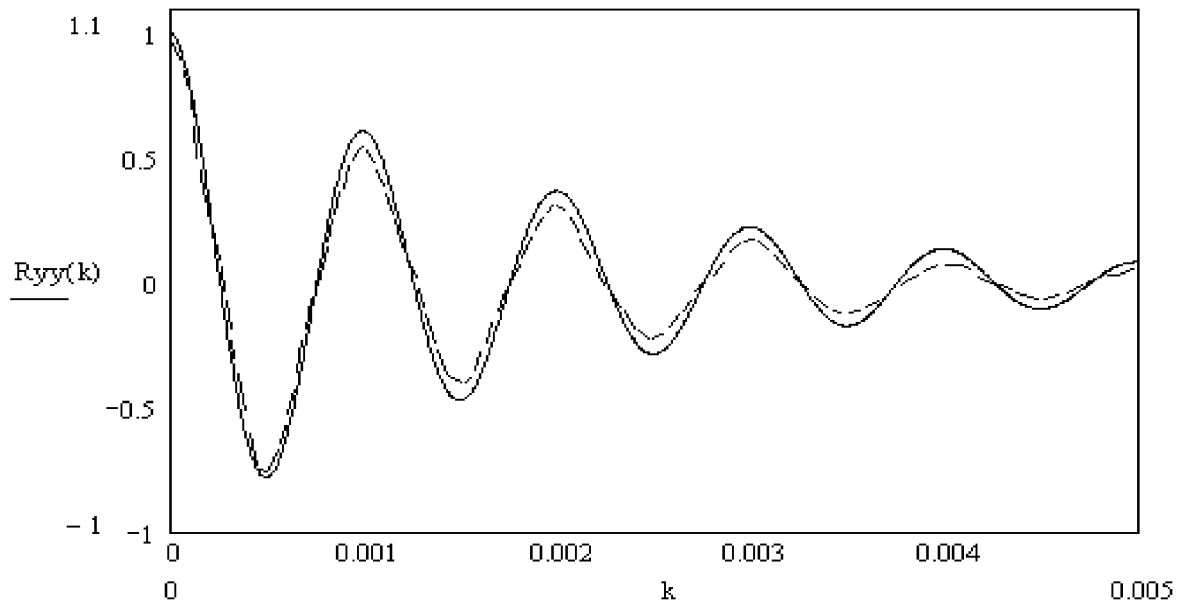


Рис.16. Графики нормированных функций корреляции на входе и выходе НФП

- Выбор типа формирующего фильтра и определение его параметров. По графику корреляционной функции можно предположить, что в качестве формирующего фильтра можно использовать АРС-фильтр с постоянной времени несколько большей τ_0 . Наилучшее приближение дает ПФ с постоянной времени – 2,165мс.

- Результаты компьютерного моделирования.

В результате моделирования процесса с заданными функцией распределения и корреляционной функцией мы получили процесс, реализация которого представлена на рис. 17.

Гистограмма статистического распределения случайного процесса на выходе НФП и теоретическое показательное распределение представлены на рисунке 18.

На рис. 19 приведены теоретическая (сплошная линия) и полученная (пунктирная линия) функции автокорреляции сигнала на выходе НФП.

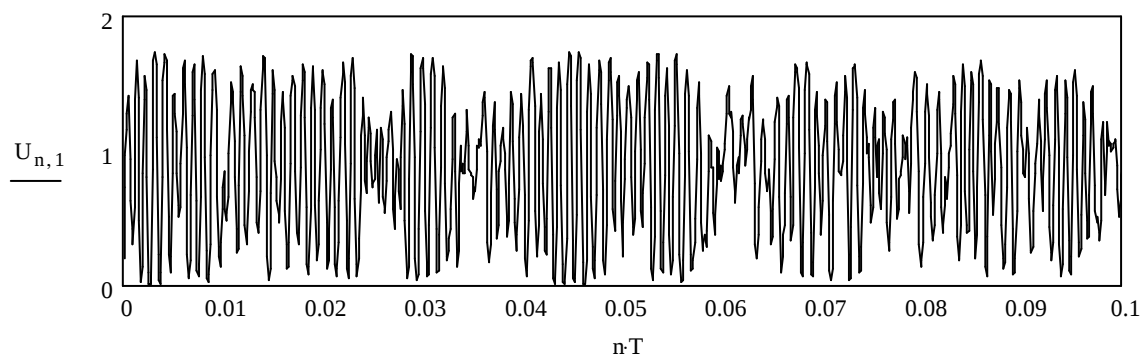


Рис. 17. Реализация процесса на выходе НФП

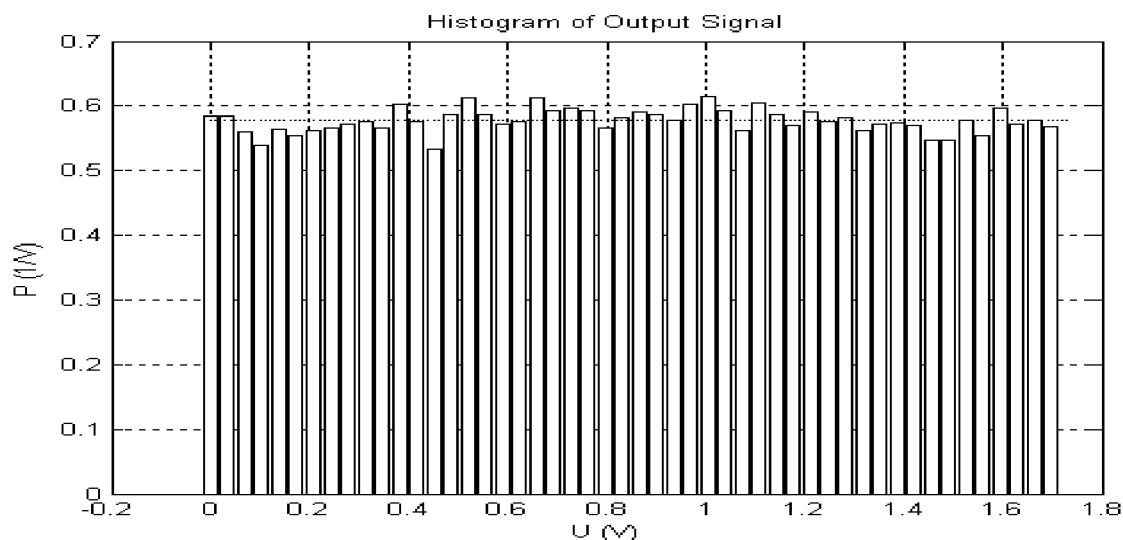


Рис. 18 Теоретическая функция равномерной плотности распределения и гистограмма оценки плотности вероятности

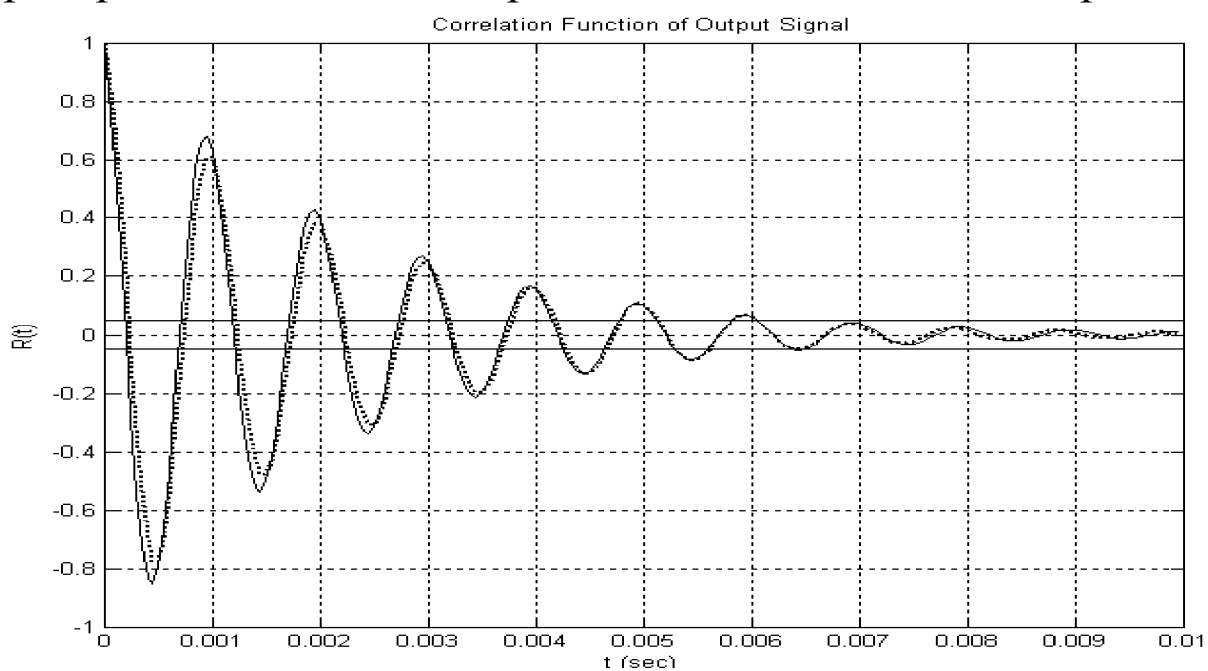


Рис. 19. Теоретическая (сплошная линия) и полученная в результате моделирования (пунктирная линия)

Заключение

В данном пособии были приведены некоторые подходы к генерированию случайных процессов с заданными статистическими характеристиками и методики контроля параметров случайных числовых последовательностей.

Рассмотренные критерии согласия Колмогорова и Пирсона показывают, что сформированные статистические распределения не противоречат выбранной гипотезе. Было показано, что интервал корреляции полученного на выходе НФП процесса несколько уменьшается по сравнению с требуемым. Объясняется этот факт тем, что после нелинейного преобразования спектр выходного сигнала НФП несколько расширяется, за счёт появления в нём гармоник более высоких порядков.

Представленный материал является весьма полезным для изучения смежных дисциплин, связанных с вопросами радиотехнических измерений и методами статистической обработки сложных сигналов.

Кроме того, в пособии представлены листинги программ генерирования случайных процессов и оценки их статистических характеристик. Данные алгоритмы, в последствии, легко компилируются и могут быть реализованы в системах на “кристалле”.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLaB 5.3/6.x – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 736 с.
2. Н. П. Бусленко, Д. И. Голенко, И. М. Соболев, В. Г. Срагович, Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. – М.: Физматгиз. 1962. – 397 с.
3. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Советское радио. 1972. 251 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов.–7-е изда. стер.– М.: Высш. шк., 2002. – 575 с.
5. Галустов Г.Г., Ковригин В.М. Генерирование процессов с заданными статистическими характеристиками // Радиотехника: вопросы теории и практики. – Таганрог, 1999.
6. Галустов Г. Г. Автоматизированные системы и аппаратура медицинской диагностики: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998. – 141 с.
7. Галустов Г. Г. Моделирование случайных процессов и оценивание их статистических характеристик. – М.: Радио и связь, 1999. – 119 с.
8. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман.– 9-е изд., стер.– М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
9. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. Изд. 2-е, переработ. и доп. – Л., Энергия, 1972. – 816 с.
10. Корн Г. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. – М.: Мир, 1967. – С. 239-245
11. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. Изд. 2-е, перер. и допол. – М.: Советское радио, 1974. – 552 с.
12. Мартынов Н.Н. Введение в MatLab 6.–М.: КУДИЦ–ОБРАЗ, 2002. – 352с.
13. Мирский Г. Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. – М.: Энергоиздат, 1982. – 320 с.
14. Панов Д. Н., Долгопалов В. Н., Гондарев В. П. К вопросу о генерировании случайных процессов с заданными статистическими характеристиками // Приборостроение. – 1971. – № 2.
15. Черных И. В. SIMULINK: среда создания инженерных приложений/ Под общ. ред. к.т.н. В. Г. Потёмкина. – М.: Диалог–МИФИ, 2003. – 496 с.

Учебное издание
Галустов Геннадий Григорьевич
Сидько Иван Владимирович

Учебное пособие
по курсу
**Математическое моделирование случайных процессов и
оценивание их статистических характеристик**

Ответственный за выпуск Сидько И.В.
Редактор Чиканенко Л.В.
Корректор Чиканенко Л.В.

ЛР № 020565 от 23 июня 1997 г.
Подписано к печати
Формат 60X84 1/16 . Бумага офсетная. Офсетная печать.
Усл. п.л. –2,6. Уч. – изд. л. –2.4.
Заказ № Тираж 100 экз.

«С»

Издательство ЮФУ
ГСП 17 А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография ЮФУ
ГСП 17 А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44